Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
24 gennaio 2013 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino il piano π di equazione $x - 2y + 2z - 2 = 0$ ed i punti $A(0;-2;3)$ e $B(2,1,5)$. Sia r la retta passante per A e per B.

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta = \frac{|x_A - 2y_A + 2z_A - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{8}{3}.$$

b) Si mostri che r è parallela al piano π.

Basta verificare che la distanza tra B e π è anch'essa uguale a $\frac{8}{3}$. Oppure si può calcolare il vettore direzionale $\overrightarrow{AB} = (2;3;2)$ della retta r e mostrare che il suo prodotto scalare con il vettore normale $\underline{n} = (1;-2;2)$ del piano π è nullo.

c) Si scrivano le equazioni della retta r.

In base a quanto già visto, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

d) Si scriva l'equazione del piano contenente r e parallelo a π.

Tale piano coincide ovviamente con quello passante per A (oppure per B) e parallelo a π. L'equazione cercata è pertanto $1(x) - 2(y+2) + 2(z-3) = 0$, ossia $x - 2y + 2z - 10 = 0$.

Esercizio 2. Sia la matrice A dipendente di un parametro reale a data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare $\det(A - 2I_3)$.

È uguale a 0, indipendentemente da a (due righe risultano uguali).

b) Dedurre dalla domanda precedente un autolvalore λ_1 di A.

$$\lambda_1 = 2 \ .$$

c) Verificare che $\underline{u}_1 = (2a + 1, 3, a - 1)^t$ è un autovettore di A.

$Au_1 = 2u_1 = \lambda_1 u_1$ e quindi siccome $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{u}_1$ è un autovettore di A.

d) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

$$P_A = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda - 2a = -(\lambda^2 - a)(\lambda - 2) \ .$$

e) Discutere al variare di a la diagonalizzabilità di A.

Per $a < 0$ il polinomio caratteristico ha una radice reale $\lambda_1 = 2$ e due radici non reali per cui la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a \geqslant 0$ gli autovalori di A sono $\pm\sqrt{a}$ e 2. In particolare se $a = 0$ l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è semplice), se $a = 4$ l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è semplice) e negli altri casi gli autovalori sono semplici.

Se $a = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è di rango 2 (perché le due prime colonne non sono proporzionali quindi è di rango almeno 2 e non può essere di rango 3 perché il suo determinante è 0) quindi l'autospazio per l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è di dimensione $3 - 2 = 1$. Perciò l'autovalore λ_2 non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e di nuovo la matrice $A - 2I_3$ è di rango 2 per cui l'autovalore λ_1 di A non è regolare e quindi A non è diagonalizzabile.

Se $a > 0$ e $a \neq 4$ la matrice A ha tre autovalori reali e distinti e quindi semplici per cui risulta diagonalizzabile.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 20x + 10y - 20z + 24 = 0.$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -10 \\ -2 & 1 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 4 & -10 \\ -10 & 5 & -10 & 24 \end{pmatrix}.$$

I punti doppi di σ sono determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z - 10 = 0 \\ -2x + y - 2z + 5 = 0 \\ 4x - 2y + 4z - 10 = 0 \\ -10x + 5y - 10z + 24 = 0 \end{cases}$$

Dal confronto tra la seconda e la quarta equazione è immediato concludere che il sistema è impossibile; quindi la quadrica non ha punti doppi.

b) Dopo aver verificato che il punto $C(0; -2; 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano π tangente a σ nel punto C.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di C nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(0, -2, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia $2x - y + 2z - 4 = 0$.

c) Verificare che il piano π è contenuto nella quadrica σ.

Basta sostituire $y = 2x + 2z - 4$ nell'equazione di σ e verificare che si ottiene un'identità.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ non ha punti doppi e contiene un piano, essa è costituita da due piani paralleli. A conferma di ciò, si può verificare che il polinomio che la definisce si fattorizza come $(2x - y + 2z - 4)(2x - y + 2z - 6)$.

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
24 gennaio 2013 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino il piano π di equazione $x - 2y + 2z - 5 = 0$ ed i punti $A(3; -2; 3)$ e $B(5, 1, 5)$. Sia r la retta passante per A e per B.

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta = \frac{|x_A - 2y_A + 2z_A - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{8}{3}.$$

b) Si mostri che r è parallela al piano π.

Basta verificare che la distanza tra B e π è anch'essa uguale a $\frac{8}{3}$. Oppure si può calcolare il vettore direzionale $\overrightarrow{AB} = (2; 3; 2)$ della retta r e mostrare che il suo prodotto scalare con il vettore normale $\underline{n} = (1; -2; 2)$ del piano π è nullo.

c) Si scrivano le equazioni della retta r.

In base a quanto già visto, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

d) Si scriva l'equazione del piano contenente r e parallelo a π.

Tale piano coincide ovviamente con quello passante per A (oppure per B) e parallelo a π. L'equazione cercata è pertanto $1(x - 3) - 2(y + 2) + 2(z - 3) = 0$, ossia $x - 2y + 2z - 13 = 0$.

Esercizio 2. Sia la matrice A dipendente di un parametro reale a data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare $\det(A - 2I_3)$.

   È uguale a 0, indipendentemente da a (due righe risultano uguali).

b) Dedurre dalla domanda precedente un autolvalore λ_1 di A.

$$\lambda_1 = 2 \ .$$

c) Verificare che $\underline{u}_1 = (2a+1, a-1, 3)^t$ è un autovettore di A.

   $Au_1 = 2u_1 = \lambda_1 u_1$ e quindi siccome $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{u}_1$ è un autovettore di A.

d) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

$$P_A = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda - 2a = -(\lambda^2 - a)(\lambda - 2) \ .$$

e) Discutere al variare di a la diagonalizzabilità di A.

   Per $a < 0$ il polinomio caratteristico ha una radice reale $\lambda_1 = 2$ e due radici non reali per cui la matrice non è diagonalizzabile.

   Se $a \geqslant 0$ gli autovalori di A sono $\pm\sqrt{a}$ e 2. In particolare se $a = 0$ l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è semplice), se $a = 4$ l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è semplice) e negli altri casi gli autovalori sono semplici.

   Se $a = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   è di rango 2 (perché le due prime colonne non sono proporzionali quindi è di rango almeno 2 e non può essere di rango 3 perché il suo determinante è 0) quindi l'autospazio per l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è di dimensione $3 - 2 = 1$. Perciò l'autovalore λ_2 non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile.

   Se $a = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

e di nuovo la matrice $A - 2I_3$ è di rango 2 per cui l'autovalore λ_1 di A non è regolare e quindi A non è diagonalizzabile.

Se $a > 0$ e $a \neq 4$ la matrice A ha tre autovalori reali e distinti e quindi semplici per cui risulta diagonalizzabile.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x + 6y - 12z + 8 = 0.$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 4 & -6 \\ -6 & 3 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

I punti doppi di σ sono determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z - 6 = 0 \\ -2x + y - 2z + 3 = 0 \\ 4x - 2y + 4z - 6 = 0 \\ -6x + 3y - 6z + 8 = 0 \end{cases}$$

Dal confronto tra la seconda e la quarta equazione è immediato concludere che il sistema è impossibile; quindi la quadrica non ha punti doppi.

b) Dopo aver verificato che il punto $C(0; -2; 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano π tangente a σ nel punto C.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di C nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(0, -2, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia $2x - y + 2z - 4 = 0$.

c) Verificare che il piano π è contenuto nella quadrica σ.

Basta sostituire $y = 2x + 2z - 4$ nell'equazione di σ e verificare che si ottiene un'identità.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ non ha punti doppi e contiene un piano, essa è costituita da due piani paralleli. A conferma di ciò, si può verificare che il polinomio che la definisce si fattorizza come $(2x - y + 2z - 4)(2x - y + 2z - 2)$.

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
24 gennaio 2013 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino il piano π di equazione $x - 2y + 2z - 3 = 0$ ed i punti $A(1; -2; 3)$ e $B(3, 1, 5)$. Sia r la retta passante per A e per B.

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta = \frac{|x_A - 2y_A + 2z_A - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{8}{3}.$$

b) Si mostri che r è parallela al piano π.

Basta verificare che la distanza tra B e π è anch'essa uguale a $\frac{8}{3}$. Oppure si può calcolare il vettore direzionale $\overrightarrow{AB} = (2; 3; 2)$ della retta r e mostrare che il suo prodotto scalare con il vettore normale $\underline{n} = (1; -2; 2)$ del piano π è nullo.

c) Si scrivano le equazioni della retta r.

In base a quanto già visto, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

d) Si scriva l'equazione del piano contenente r e parallelo a π.

Tale piano coincide ovviamente con quello passante per A (oppure per B) e parallelo a π. L'equazione cercata è pertanto $1(x - 1) - 2(y + 2) + 2(z - 3) = 0$, ossia $x - 2y + 2z - 11 = 0$.

Esercizio 2. Sia la matrice A dipendente di un parametro reale a data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare $\det(A - 2I_3)$.

   È uguale a 0, indipendentemente da a (due righe risultano uguali).

b) Dedurre dalla domanda precedente un autolvalore λ_1 di A.

$$\lambda_1 = 2 \ .$$

c) Verificare che $\underline{u}_1 = (3, 2a+1, a-1)^t$ è un autovettore di A.

   $Au_1 = 2u_1 = \lambda_1 u_1$ e quindi siccome $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{u}_1$ è un autovettore di A.

d) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

$$P_A = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda - 2a = -(\lambda^2 - a)(\lambda - 2) \ .$$

e) Discutere al variare di a la diagonalizzabilità di A.

   Per $a < 0$ il polinomio caratteristico ha una radice reale $\lambda_1 = 2$ e due radici non reali per cui la matrice non è diagonalizzabile.

   Se $a \geqslant 0$ gli autovalori di A sono $\pm\sqrt{a}$ e 2. In particolare se $a = 0$ l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è semplice), se $a = 4$ l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è semplice) e negli altri casi gli autovalori sono semplici.

   Se $a = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   è di rango 2 (perché le due prime colonne non sono proporzionali quindi è di rango almeno 2 e non può essere di rango 3 perché il suo determinante è 0) quindi l'autospazio per l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è di dimensione $3 - 2 = 1$. Perciò l'autovalore λ_2 non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile.

   Se $a = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e di nuovo la matrice $A - 2I_3$ è di rango 2 per cui l'autovalore λ_1 di A non è regolare e quindi A non è diagonalizzabile.

Se $a > 0$ e $a \neq 4$ la matrice A ha tre autovalori reali e distinti e quindi semplici per cui risulta diagonalizzabile.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 16 = 0.$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

I punti doppi di σ sono determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \\ 4x - 2y + 4z = 0 \\ -16 = 0 \end{cases}$$

Dal confronto tra la seconda e la quarta equazione è immediato concludere che il sistema è impossibile; quindi la quadrica non ha punti doppi.

b) Dopo aver verificato che il punto $C(0; -2; 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano π tangente a σ nel punto C.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di C nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(0, -2, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia $2x - y + 2z - 4 = 0$.

c) Verificare che il piano π è contenuto nella quadrica σ.

Basta sostituire $y = 2x + 2z - 4$ nell'equazione di σ e verificare che si ottiene un'identità.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ non ha punti doppi e contiene un piano, essa è costituita da due piani paralleli. A conferma di ciò, si può verificare che il polinomio che la definisce si fattorizza come $(2x - y + 2z - 4)(2x - y + 2z + 4)$.

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
24 gennaio 2013 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino il piano π di equazione $x - 2y + 2z - 1 = 0$ ed i punti $A(-1; -2; 3)$ e $B(1, 1, 5)$. Sia r la retta passante per A e per B.

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta = \frac{|x_A - 2y_A + 2z_A - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{8}{3}.$$

b) Si mostri che r è parallela al piano π.

Basta verificare che la distanza tra B e π è anch'essa uguale a $\frac{8}{3}$. Oppure si può calcolare il vettore direzionale $\overrightarrow{AB} = (2; 3; 2)$ della retta r e mostrare che il suo prodotto scalare con il vettore normale $\underline{n} = (1; -2; 2)$ del piano π è nullo.

c) Si scrivano le equazioni della retta r.

In base a quanto già visto, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

d) Si scriva l'equazione del piano contenente r e parallelo a π.

Tale piano coincide ovviamente con quello passante per A (oppure per B) e parallelo a π. L'equazione cercata è pertanto $1(x + 1) - 2(y + 2) + 2(z - 3) = 0$, ossia $x - 2y + 2z - 9 = 0$.

Esercizio 2. Sia la matrice A dipendente di un parametro reale a data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare $\det(A - 2I_3)$.

   È uguale a 0, indipendentemente da a (due righe risultano uguali).

b) Dedurre dalla domanda precedente un autolvalore λ_1 di A.

$$\lambda_1 = 2 \ .$$

c) Verificare che $\underline{u}_1 = (3, a-1, 2a+1)^t$ è un autovettore di A.

   $Au_1 = 2u_1 = \lambda_1 u_1$ e quindi siccome $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{u}_1$ è un autovettore di A.

d) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

$$P_A = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda - 2a = -(\lambda^2 - a)(\lambda - 2) \ .$$

e) Discutere al variare di a la diagonalizzabilità di A.

   Per $a < 0$ il polinomio caratteristico ha una radice reale $\lambda_1 = 2$ e due radici non reali per cui la matrice non è diagonalizzabile.

   Se $a \geqslant 0$ gli autovalori di A sono $\pm\sqrt{a}$ e 2. In particolare se $a = 0$ l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è semplice), se $a = 4$ l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è doppio (e l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è semplice) e negli altri casi gli autovalori sono semplici.

   Se $a = 0$,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   è di rango 2 (perché le due prime colonne non sono proporzionali quindi è di rango almeno 2 e non può essere di rango 3 perché il suo determinante è 0) quindi l'autospazio per l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è di dimensione $3 - 2 = 1$. Perciò l'autovalore λ_2 non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile.

   Se $a = 4$,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e di nuovo la matrice $A - 2I_3$ è di rango 2 per cui l'autovalore λ_1 di A non è regolare e quindi A non è diagonalizzabile.

Se $a > 0$ e $a \neq 4$ la matrice A ha tre autovalori reali e distinti e quindi semplici per cui risulta diagonalizzabile.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 4x + 2y - 4z - 8 = 0.$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

I punti doppi di σ sono determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z - 2 = 0 \\ -2x + y - 2z + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 4z - 2 = 0 \\ -2x + y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

Dal confronto tra la seconda e la quarta equazione è immediato concludere che il sistema è impossibile; quindi la quadrica non ha punti doppi.

b) Dopo aver verificato che il punto $C(0; -2; 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano π tangente a σ nel punto C.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di C nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(0, -2, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia $2x - y + 2z - 4 = 0$.

c) Verificare che il piano π è contenuto nella quadrica σ.

Basta sostituire $y = 2x + 2z - 4$ nell'equazione di σ e verificare che si ottiene un'identità.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ non ha punti doppi e contiene un piano, essa è costituita da due piani paralleli. A conferma di ciò, si può verificare che il polinomio che la definisce si fattorizza come $(2x - y + 2z - 4)(2x - y + 2z + 2)$.

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.