Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
31 agosto 2012 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i sottoinsiemi S_k di $\mathbb{R}^4$ dati da:

$$S_k = \{(2 + t + kt^2, -2t - 4, -2t - 4, 3t + 6) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

a) Dimostrare che S_k è un sottospazio se e solo se $k = 0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 2 + t + kt^2 = 0 \\ -2t - 4 = 0 \\ -2t - 4 = 0 \\ 3t + 6 = 0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$ (e la soluzione è $t = -2$). Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente utlizzando la definizione. Infatti

- S_0 non è vuoto, poiché abbiamo appena visto che contiene il vettore nullo.
- S_0 è chiuso rispetto alla somma: dati due vettori $(2+t_1, -2t_1-4, -2t_1-4, 3t_1+6)$ e $(2 + t_2, -2t_2 - 4, -2t_2 - 4, 3t_2 + 6)$, appartenenti ad S_0, la loro somma è

$$\begin{aligned}(2 + t_1, -2t_1 - 4, -2t_1 - 4, 3t_1 + 6) + (2 + t_2, -2t_2 - 4, -2t_2 - 4, 3t_2 + 6)\\ = \Big(2 + (t_1 + t_2 + 2), -2(t_1 + t_2 + 2) - 4, -2(t_1 + t_2 + 2) - 4,\\ 3(t_1 + t_2 + 2) + 6\Big)\end{aligned}$$

e quindi appartiene anch'essa ad S_0.

- S_0 è chiuso rispetto al prodotto esterno: dati uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e un vettore $(2+t, -2t-4, -2t-4, 3t+6)$, appartenente ad S_0, il loro prodotto è

$$\lambda(2+t, -2t-4, -2t-4, 3t+6) = \Big(2+[\lambda(t+2)-2], -2[\lambda(t+2)-2]-4, -2[\lambda(t+2)-2]-4, 3[\lambda(t+2)-2]+6\Big)$$

e quindi appartiene anch'esso ad S_0.

Più semplicemente, si poteva dimostrare che S_0 è un sottospazio osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(2+t, -2t-4, -2t-4, 3t+6) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2+t)(1, -2, -2, 3) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1, -2, -2, 3) \mid s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato dal vettore $\underline{v} = (1, -2, -2, 3)$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) Esibire una base di S_0 ed indicarne la dimensione.

Per quanto appena visto, una base di S_0 è formata dal solo vettore $\underline{v}$ e la dimensione di S_0 è 1.

c) Esiste un sottospazio bidimensionale di $\mathbb{R}^4$ contenuto in $V = \{(x, y, z, u) \mid 2x+y+3z+2u = 0\}$ e contenente S_0? In caso affermativo, fornire un esempio.

È facile vedere che il generatore $\underline{v}$ di S_0 appartiene a V e che la dimensione di V è 3. Quindi certamente esiste un sottospazio con le caratteristiche richieste. Per fornirne un esempio basta trovare un vettore $\underline{w}$ appartenente a V e non proporzionale a $\underline{v}$, per esempio $\underline{w} = (0, 0, -2, 3)$. Allora il sottospazio $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$, generato da $\underline{v}$ e da $\underline{w}$, ha dimensione 2 (poiché generato da due vettori non proporzionali), è contenuto in V (poiché $\underline{v}$ e $\underline{w} \in V$) e contiene S_0.

Esercizio 2. Si consideri il sistema seguente, dipendente da un parametro reale a:

$$\begin{cases} 6x - 7y + 2z = 17 \\ 4x - 5y + z = 11 \\ 5x + ay + 2z = 14 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

a) Indicare, al variare del parametro a, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Risolviamo la domanda usando il teorema di Rouché–Capelli. È un sistema di 4 equazioni in 3 incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & a & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la caratteristica della matrice A usiamo la tecnica ispirata dal teorema di Kronecker. Abbiamo $\operatorname{car} A \leqslant 3$ per il numero di colonne. Il coefficiente in alto a sinistra della matrice A è diverso da zero quindi $\operatorname{car} A \geqslant 1$, la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante $-2 \neq 0$ quindi $\operatorname{car} A \geqslant 2$.

La sottomatrice composta dalla prima, seconda e quarta riga ha determinante 0 per cui non possiamo ancora concludere sulla caratteristica di A.

Il determinante della sottomatrice composta dalle 3 prime righe è

$$2a + 11$$

Per ciò

- se $a \neq -\frac{11}{2}$, $\operatorname{car} A = 3$;
- se $a = -\frac{11}{2}$, per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$.

Consideriamo ora la matrice completa $B = (A \mid \underline{b})$.

- Per $a \neq -\frac{11}{2}$, $\operatorname{car} A = 3$ per cui $\operatorname{car} B$ è 3 o 4. Per sapere se è 4 ci basta calcolare $\det B$. Risulta $\det B = 0$. Quindi $\operatorname{car} B < 4$ cioè $\operatorname{car} B = 3$.
- Siccome $\det B = 0$ (il calcolo fatto al punto precedente è valido per ogni a), sappiamo che $\operatorname{car} B < 4$. Per conoscere la caratteristica di B, sfruttando il teorema di Kronecker, ci basta calcolare il determinante delle due sottomatrici

  $$B_1 = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 17 \\ 4 & -5 & 11 \\ 5 & -\frac{11}{2} & 14 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 17 \\ 4 & -5 & 11 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

  cioè le sottomatrice ottenute togliendo la terza colonna e una volta la terza e una volta la quarta riga. La sottomatrice B_1 ha determinante diverso da 0 per cui $\operatorname{car} B \geqslant 3$ e quindi $\operatorname{car} B = 3$.

In conclusione

- Se $a \neq -\frac{11}{2}$, car $A =$ car $B = 3$ per cui il sistema ammette un'unica soluzione.
- Se $a = -\frac{11}{2}$, car $A = 2$ e car $B = 3$ per cui il non ammette soluzione.

b) Risolvere il sistema nel caso in cui $a = -5$.

Dalla domanda precedente il sistema ammette un'unica soluzione e la quarta equazione può essere eliminata. La soluzione del sistema è semplice e risulta

$$\mathcal{S} = \{(1; -1; 2)\} \ .$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$2x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 36x = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta controllare se il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

ha soluzioni. Ma tale sistema è dato da

$$\begin{cases} 2x + 2z + 18 = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che è impossibile. Quindi σ non è a centro.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 0$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad z \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(x' + 2y' - 2z') \\ y = \frac{1}{3}(-2x' + 2y' + z') \\ z = \frac{1}{3}(2x' + y' + 2z') \end{cases}$$

che porta l'equazione di σ nella forma

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + 12(x' + 2y' - 2z') = 0,$$

ossia

$$2(x')^2 + (y')^2 + 4x' + 8y' - 8z' = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' + 4 \\ Z = z' + \frac{9}{4} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$Z = \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{8}.$$

Essa è pertanto un paraboloide ellittico.

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(X + 2Y - 2Z - \frac{9}{2}) \\ y = \frac{1}{3}(-2X + 2Y + Z - \frac{33}{4}) \\ z = \frac{1}{3}(2X + Y + 2Z - \frac{21}{2}) \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
31 agosto 2012 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i sottoinsiemi S_k di $\mathbb{R}^4$ dati da:

$$S_k = \{(2 + t + kt^2, t + 2, -2t - 4, 3t + 6) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

a) Dimostrare che S_k è un sottospazio se e solo se $k = 0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 2 + t + kt^2 = 0 \\ t + 2 = 0 \\ -2t - 4 = 0 \\ 3t + 6 = 0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$ (e la soluzione è $t = -2$). Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente utlizzando la definizione. Infatti

- S_0 non è vuoto, poiché abbiamo appena visto che contiene il vettore nullo.
- S_0 è chiuso rispetto alla somma: dati due vettori $(2+t_1, t_1+2, -2t_1-4, 3t_1+6)$ e $(2 + t_2, t_2 + 2, -2t_2 - 4, 3t_2 + 6)$, appartenenti ad S_0, la loro somma è

$$\begin{aligned}(2 + t_1, t_1 + 2, -2t_1 - 4, 3t_1 + 6) + (2 + t_2, t_2 + 2, -2t_2 - 4, 3t_2 + 6)\\ = \Big(2 + (t_1 + t_2 + 2), (t_1 + t_2 + 2) + 2, -2(t_1 + t_2 + 2) - 4,\\ 3(t_1 + t_2 + 2) + 6\Big)\end{aligned}$$

e quindi appartiene anch'essa ad S_0.

- S_0 è chiuso rispetto al prodotto esterno: dati uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e un vettore $(2+t, t+2, -2t-4, 3t+6)$, appartenente ad S_0, il loro prodotto è

$$\begin{aligned}\lambda(2+t,&t+2,-2t-4,3t+6) = \\ &\Big(2+[\lambda(t+2)-2], [\lambda(t+2)-2]+2, -2[\lambda(t+2)-2]-4, \\ &\quad 3[\lambda(t+2)-2]+6\Big)\end{aligned}$$

  e quindi appartiene anch'esso ad S_0.

Più semplicemente, si poteva dimostrare che S_0 è un sottospazio osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(2+t, t+2, -2t-4, 3t+6) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2+t)(1,1,-2,3) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,1,-2,3) \mid s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato dal vettore $\underline{v} = (1,1,-2,3)$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) Esibire una base di S_0 ed indicarne la dimensione.

Per quanto appena visto, una base di S_0 è formata dal solo vettore $\underline{v}$ e la dimensione di S_0 è 1.

c) Esiste un sottospazio bidimensionale di $\mathbb{R}^4$ contenuto in $V = \{(x,y,z,u) \mid -x+y+3z+2u = 0\}$ e contenente S_0? In caso affermativo, fornire un esempio.

È facile vedere che il generatore $\underline{v}$ di S_0 appartiene a V e che la dimensione di V è 3. Quindi certamente esiste un sottospazio con le caratteristiche richieste. Per fornirne un esempio basta trovare un vettore $\underline{w}$ appartenente a V e non proporzionale a $\underline{v}$, per esempio $\underline{w} = (0,0,-2,3)$. Allora il sottospazio $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$, generato da $\underline{v}$ e da $\underline{w}$, ha dimensione 2 (poiché generato da due vettori non proporzionali), è contenuto in V (poiché $\underline{v}$ e $\underline{w} \in V$) e contiene S_0.

Esercizio 2. Si consideri il sistema seguente, dipendente da un parametro reale a:

$$\begin{cases} 7x + y - z = 4 \\ 6x + 2y + z = 6 \\ x + ay - 4z = -5 \\ 5x + 3y + 3z = 8 \end{cases}$$

a) Indicare, al variare del parametro a, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Risolviamo la domanda usando il teorema di Rouché–Capelli. È un sistema di 4 equazioni in 3 incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & a & -4 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la caratteristica della matrice A usiamo la tecnica ispirata dal teorema di Kronecker. Abbiamo $\operatorname{car} A \leqslant 3$ per il numero di colonne. Il coefficiente in alto a sinistra della matrice A è diverso da zero quindi $\operatorname{car} A \geqslant 1$, la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante $8 \neq 0$ quindi $\operatorname{car} A \geqslant 2$.

La sottomatrice composta dalla prima, seconda e quarta riga ha determinante 0 per cui non possiamo ancora concludere sulla caratteristica di A.

Il determinante della sottomatrice composta dalle 3 prime righe è

$$-13a - 29$$

Per ciò

- se $a \neq -\frac{29}{13}$, $\operatorname{car} A = 3$;
- se $a = -\frac{29}{13}$, per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$.

Consideriamo ora la matrice completa $B = (A \mid \underline{b})$.

- Per $a \neq -\frac{29}{13}$, $\operatorname{car} A = 3$ per cui $\operatorname{car} B$ è 3 o 4. Per sapere se è 4 ci basta calcolare $\det B$. Risulta $\det B = 0$. Quindi $\operatorname{car} B < 4$ cioè $\operatorname{car} B = 3$.
- Siccome $\det B = 0$ (il calcolo fatto al punto precedente è valido per ogni a), sappiamo che $\operatorname{car} B < 4$. Per conoscere la caratteristica di B, sfruttando il teorema di Kronecker, ci basta calcolare il determinante delle due sottomatrici

  $$B_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 1 & -\frac{29}{13} & -5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

  cioè le sottomatrice ottenute togliendo la terza colonna e una volta la terza e una volta la quarta riga. La sottomatrice B_1 ha determinante diverso da 0 per cui $\operatorname{car} B \geqslant 3$ e quindi $\operatorname{car} B = 3$.

In conclusione

- Se $a \neq -\frac{29}{13}$, $\operatorname{car} A = \operatorname{car} B = 3$ per cui il sistema ammette un'unica soluzione.
- Se $a = -\frac{29}{13}$, $\operatorname{car} A = 2$ e $\operatorname{car} B = 3$ per cui il non ammette soluzione.

b) Risolvere il sistema nel caso in cui $a = -2$.

Dalla domanda precedente il sistema ammette un'unica soluzione e la quarta equazione può essere eliminata. La soluzione del sistema è semplice e risulta

$$\mathcal{S} = \{(1; -1; 2)\} \ .$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$2x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 18x = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta controllare se il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

ha soluzioni. Ma tale sistema è dato da

$$\begin{cases} 2x + 2z + 9 = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che è impossibile. Quindi σ non è a centro.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 0$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad z \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(x' + 2y' - 2z') \\ y = \frac{1}{3}(-2x' + 2y' + z') \\ z = \frac{1}{3}(2x' + y' + 2z') \end{cases}$$

che porta l'equazione di σ nella forma

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + 6(x' + 2y' - 2z') = 0,$$

ossia

$$2(x')^2 + (y')^2 + 2x' + 4y' - 4z' = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + \frac{1}{2} \\ Y = y' + 2 \\ Z = z' + \frac{9}{8} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$Z = \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{4}.$$

Essa è pertanto un paraboloide ellittico.

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(X + 2Y - 2Z - \frac{9}{4}) \\ y = \frac{1}{3}(-2X + 2Y + Z - \frac{33}{8}) \\ z = \frac{1}{3}(2X + Y + 2Z - \frac{21}{4}) \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
31 agosto 2012 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i sottoinsiemi S_k di $\mathbb{R}^4$ dati da:

$$S_k = \{(2 + t + kt^2, -t - 2, -2t - 4, 3t + 6) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

a) Dimostrare che S_k è un sottospazio se e solo se $k = 0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 2 + t + kt^2 = 0 \\ -t - 2 = 0 \\ -2t - 4 = 0 \\ 3t + 6 = 0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$ (e la soluzione è $t = -2$). Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente utlizzando la definizione. Infatti

- S_0 non è vuoto, poiché abbiamo appena visto che contiene il vettore nullo.
- S_0 è chiuso rispetto alla somma: dati due vettori $(2+t_1, -t_1-2, -2t_1-4, 3t_1+6)$ e $(2 + t_2, -t_2 - 2, -2t_2 - 4, 3t_2 + 6)$, appartenenti ad S_0, la loro somma è

$$\begin{aligned}(2 + t_1, -t_1 - 2, -2t_1 - 4, 3t_1 + 6) + (2 + t_2, -t_2 - 2, -2t_2 - 4, 3t_2 + 6)\\ = \Big(2 + (t_1 + t_2 + 2), -(t_1 + t_2 + 2) - 2, -2(t_1 + t_2 + 2) - 4,\\ 3(t_1 + t_2 + 2) + 6\Big)\end{aligned}$$

  e quindi appartiene anch'essa ad S_0.

- S_0 è chiuso rispetto al prodotto esterno: dati uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e un vettore $(2+t, -t-2, -2t-4, 3t+6)$, appartenente ad S_0, il loro prodotto è

$$\begin{aligned}&\lambda(2+t,-t-2,-2t-4,3t+6) = \\ &\qquad\Big(2+[\lambda(t+2)-2], -[\lambda(t+2)-2]-2, -2[\lambda(t+2)-2]-4, \\ &\qquad\quad 3[\lambda(t+2)-2]+6\Big)\end{aligned}$$

e quindi appartiene anch'esso ad S_0.

Più semplicemente, si poteva dimostrare che S_0 è un sottospazio osservando che

$$\begin{aligned}S_0 &= \{(2+t,-t-2,-2t-4,3t+6) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2+t)(1,-1,-2,3) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,-1,-2,3) \mid s \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato dal vettore $\underline{v} = (1,-1,-2,3)$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) Esibire una base di S_0 ed indicarne la dimensione.

Per quanto appena visto, una base di S_0 è formata dal solo vettore $\underline{v}$ e la dimensione di S_0 è 1.

c) Esiste un sottospazio bidimensionale di $\mathbb{R}^4$ contenuto in $V = \{(x,y,z,u) \mid x+y+3z+2u = 0\}$ e contenente S_0? In caso affermativo, fornire un esempio.

È facile vedere che il generatore $\underline{v}$ di S_0 appartiene a V e che la dimensione di V è 3. Quindi certamente esiste un sottospazio con le caratteristiche richieste. Per fornirne un esempio basta trovare un vettore $\underline{w}$ appartenente a V e non proporzionale a $\underline{v}$, per esempio $\underline{w} = (0,0,-2,3)$. Allora il sottospazio $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$, generato da $\underline{v}$ e da $\underline{w}$, ha dimensione 2 (poiché generato da due vettori non proporzionali), è contenuto in V (poiché $\underline{v}$ e $\underline{w} \in V$) e contiene S_0.

Esercizio 2. Si consideri il sistema seguente, dipendente da un parametro reale a:

$$\begin{cases} 3x + 6y + z = -1 \\ 7x + 5y - 7z = -12 \\ 7x + ay - 6z = -11 \\ 11x + 4y - 15z = -23 \end{cases}$$

a) Indicare, al variare del parametro a, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Risolviamo la domanda usando il teorema di Rouché–Capelli. È un sistema di 4 equazioni in 3 incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & -7 \\ 7 & a & -6 \\ 11 & 4 & -15 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ -11 \\ -23 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la caratteristica della matrice A usiamo la tecnica ispirata dal teorema di Kronecker. Abbiamo $\operatorname{car} A \leqslant 3$ per il numero di colonne. Il coefficiente in alto a sinistra della matrice A è diverso da zero quindi $\operatorname{car} A \geqslant 1$, la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante $-27 \neq 0$ quindi $\operatorname{car} A \geqslant 2$.

La sottomatrice composta dalla prima, seconda e quarta riga ha determinante 0 per cui non possiamo ancora concludere sulla caratteristica di A.

Il determinante della sottomatrice composta dalle 3 prime righe è

$$28a - 167$$

Per ciò

- se $a \neq \frac{167}{28}$, $\operatorname{car} A = 3$;
- se $a = \frac{167}{28}$, per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$.

Consideriamo ora la matrice completa $B = (A \mid \underline{b})$.

- Per $a \neq \frac{167}{28}$, $\operatorname{car} A = 3$ per cui $\operatorname{car} B$ è 3 o 4. Per sapere se è 4 ci basta calcolare $\det B$. Risulta $\det B = 0$. Quindi $\operatorname{car} B < 4$ cioè $\operatorname{car} B = 3$.
- Siccome $\det B = 0$ (il calcolo fatto al punto precedente è valido per ogni a), sappiamo che $\operatorname{car} B < 4$. Per conoscere la caratteristica di B, sfruttando il teorema di Kronecker, ci basta calcolare il determinante delle due sottomatrici

  $$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 7 & 5 & -12 \\ 7 & \frac{167}{28} & -11 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 7 & 5 & -12 \\ 11 & 4 & -23 \end{pmatrix},$$

  cioè le sottomatrice ottenute togliendo la terza colonna e una volta la terza e una volta la quarta riga. La sottomatrice B_1 ha determinante diverso da 0 per cui $\operatorname{car} B \geqslant 3$ e quindi $\operatorname{car} B = 3$.

In conclusione

- Se $a \neq \frac{167}{28}$, $\operatorname{car} A = \operatorname{car} B = 3$ per cui il sistema ammette un'unica soluzione.
- Se $a = \frac{167}{28}$, $\operatorname{car} A = 2$ e $\operatorname{car} B = 3$ per cui il non ammette soluzione.

b) Risolvere il sistema nel caso in cui $a = 6$.

Dalla domanda precedente il sistema ammette un'unica soluzione e la quarta equazione può essere eliminata. La soluzione del sistema è semplice e risulta

$$\mathcal{S} = \{(1; -1; 2)\} \ .$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$2x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 72x = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta controllare se il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 36 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

ha soluzioni. Ma tale sistema è dato da

$$\begin{cases} 2x + 2z + 36 = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che è impossibile. Quindi σ non è a centro.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 0$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(x' + 2y' - 2z') \\ y = \frac{1}{3}(-2x' + 2y' + z') \\ z = \frac{1}{3}(2x' + y' + 2z') \end{cases}$$

che porta l'equazione di σ nella forma

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + 24(x' + 2y' - 2z') = 0,$$

ossia

$$2(x')^2 + (y')^2 + 8x' + 16y' - 16z' = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 2 \\ Y = y' + 8 \\ Z = z' + \frac{9}{2} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$Z = \frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{16}.$$

Essa è pertanto un paraboloide ellittico.

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(X + 2Y - 2Z - 9) \\ y = \frac{1}{3}(-2X + 2Y + Z - \frac{33}{2}) \\ z = \frac{1}{3}(2X + Y + 2Z - 21) \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
31 agosto 2012 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i sottoinsiemi S_k di $\mathbb{R}^4$ dati da:

$$S_k = \{(2 + t + kt^2, 2t + 4, -2t - 4, 3t + 6) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

a) Dimostrare che S_k è un sottospazio se e solo se $k = 0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 2 + t + kt^2 = 0 \\ 2t + 4 = 0 \\ -2t - 4 = 0 \\ 3t + 6 = 0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$ (e la soluzione è $t = -2$). Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente utlizzando la definizione. Infatti

- S_0 non è vuoto, poiché abbiamo appena visto che contiene il vettore nullo.
- S_0 è chiuso rispetto alla somma: dati due vettori $(2+t_1, 2t_1+4, -2t_1-4, 3t_1+6)$ e $(2 + t_2, 2t_2 + 4, -2t_2 - 4, 3t_2 + 6)$, appartenenti ad S_0, la loro somma è

$$\begin{aligned}(2 + t_1, 2t_1 + 4, -2t_1 - 4, 3t_1 + 6) + (2 + t_2, 2t_2 + 4, -2t_2 - 4, 3t_2 + 6)\\ = \Big(2 + (t_1 + t_2 + 2), 2(t_1 + t_2 + 2) + 4, -2(t_1 + t_2 + 2) - 4,\\ 3(t_1 + t_2 + 2) + 6\Big)\end{aligned}$$

  e quindi appartiene anch'essa ad S_0.

- S_0 è chiuso rispetto al prodotto esterno: dati uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e un vettore $(2+t, 2t+4, -2t-4, 3t+6)$, appartenente ad S_0, il loro prodotto è

$$\begin{aligned}\lambda(2+t,&2t+4,-2t-4,3t+6) = \\ &\Big(2+[\lambda(t+2)-2], 2[\lambda(t+2)-2]+4, -2[\lambda(t+2)-2]-4, \\ &\quad 3[\lambda(t+2)-2]+6\Big)\end{aligned}$$

e quindi appartiene anch'esso ad S_0.

Più semplicemente, si poteva dimostrare che S_0 è un sottospazio osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(2+t, 2t+4, -2t-4, 3t+6) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2+t)(1,2,-2,3) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,2,-2,3) \mid s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato dal vettore $\underline{v} = (1,2,-2,3)$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) Esibire una base di S_0 ed indicarne la dimensione.

Per quanto appena visto, una base di S_0 è formata dal solo vettore $\underline{v}$ e la dimensione di S_0 è 1.

c) Esiste un sottospazio bidimensionale di $\mathbb{R}^4$ contenuto in $V = \{(x,y,z,u) \mid -2x+y+3z+2u=0\}$ e contenente S_0? In caso affermativo, fornire un esempio.

È facile vedere che il generatore $\underline{v}$ di S_0 appartiene a V e che la dimensione di V è 3. Quindi certamente esiste un sottospazio con le caratteristiche richieste. Per fornirne un esempio basta trovare un vettore $\underline{w}$ appartenente a V e non proporzionale a $\underline{v}$, per esempio $\underline{w} = (0,0,-2,3)$. Allora il sottospazio $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$, generato da $\underline{v}$ e da $\underline{w}$, ha dimensione 2 (poiché generato da due vettori non proporzionali), è contenuto in V (poiché $\underline{v}$ e $\underline{w} \in V$) e contiene S_0.

Esercizio 2. Si consideri il sistema seguente, dipendente da un parametro reale a:

$$\begin{cases} 2x+3y-3z=-7 \\ 5x+6y-2z=-5 \\ x+ay-4z=-9 \\ 8x+9y-z=-3 \end{cases}$$

a) Indicare, al variare del parametro a, l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema.

Risolviamo la domanda usando il teorema di Rouché–Capelli. È un sistema di 4 equazioni in 3 incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \\ 1 & a & -4 \\ 8 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la caratteristica della matrice A usiamo la tecnica ispirata dal teorema di Kronecker. Abbiamo $\operatorname{car} A \leqslant 3$ per il numero di colonne. Il coefficiente in alto a sinistra della matrice A è diverso da zero quindi $\operatorname{car} A \geqslant 1$, la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante $-3 \neq 0$ quindi $\operatorname{car} A \geqslant 2$.

La sottomatrice composta dalla prima, seconda e quarta riga ha determinante 0 per cui non possiamo ancora concludere sulla caratteristica di A.

Il determinante della sottomatrice composta dalle 3 prime righe è

$$-11a + 24$$

Per ciò

- se $a \neq \frac{24}{11}$, $\operatorname{car} A = 3$;
- se $a = \frac{24}{11}$, per il teorema di Kronecker, $\operatorname{car} A = 2$.

Consideriamo ora la matrice completa $B = (A \mid \underline{b})$.

- Per $a \neq \frac{24}{11}$, $\operatorname{car} A = 3$ per cui $\operatorname{car} B$ è 3 o 4. Per sapere se è 4 ci basta calcolare $\det B$. Risulta $\det B = 0$. Quindi $\operatorname{car} B < 4$ cioè $\operatorname{car} B = 3$.
- Siccome $\det B = 0$ (il calcolo fatto al punto precedente è valido per ogni a), sappiamo che $\operatorname{car} B < 4$. Per conoscere la caratteristica di B, sfruttando il teorema di Kronecker, ci basta calcolare il determinante delle due sottomatrici

  $$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 5 & 6 & -5 \\ 1 & \frac{24}{11} & -9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 5 & 6 & -5 \\ 8 & 9 & -3 \end{pmatrix},$$

  cioè le sottomatrice ottenute togliendo la terza colonna e una volta la terza e una volta la quarta riga. La sottomatrice B_1 ha determinante diverso da 0 per cui $\operatorname{car} B \geqslant 3$ e quindi $\operatorname{car} B = 3$.

In conclusione

- Se $a \neq \frac{24}{11}$, $\operatorname{car} A = \operatorname{car} B = 3$ per cui il sistema ammette un'unica soluzione.
- Se $a = \frac{24}{11}$, $\operatorname{car} A = 2$ e $\operatorname{car} B = 3$ per cui il non ammette soluzione.

b) Risolvere il sistema nel caso in cui $a = 2$.

Dalla domanda precedente il sistema ammette un'unica soluzione e la quarta equazione può essere eliminata. La soluzione del sistema è semplice e risulta

$$\mathcal{S} = \{(1; -1; 2)\} \ .$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$2x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 54x = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta controllare se il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

ha soluzioni. Ma tale sistema è dato da

$$\begin{cases} 2x + 2z + 27 = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che è impossibile. Quindi σ non è a centro.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 0$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad z \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(x' + 2y' - 2z') \\ y = \frac{1}{3}(-2x' + 2y' + z') \\ z = \frac{1}{3}(2x' + y' + 2z') \end{cases}$$

che porta l'equazione di σ nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 18(x' + 2y' - 2z') = 0,$$

ossia

$$2(x')^2 + (y')^2 + 6x' + 12y' - 12z' = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + \frac{3}{2} \\ Y = y' + 6 \\ Z = z' + \frac{27}{8} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$Z = \frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{12}.$$

Essa è pertanto un paraboloide ellittico.

c) Scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta σ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(X + 2Y - 2Z - \frac{27}{4}) \\ y = \frac{1}{3}(-2X + 2Y + Z - \frac{99}{8}) \\ z = \frac{1}{3}(2X + Y + 2Z - \frac{63}{4}) \end{cases}$$