Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
18 luglio 2012 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 2 ore per il compitino. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -2, -4, 3),\ \underline{v}_2 = (0, -3, -2, 4),\ \underline{v}_3 = (2, 5, -2, -6),\ \underline{v}_4 = (2, -1, 2, 10)\ .$$

a) È possibile estrarre da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ una coppia di vettori linearmente indipendenti?

Sì, per esempio è facile vedere che $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Oppure si può sfruttare il risultato del punto c), con $k = 0$.

b) È possibile estrarre da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ una terna di vettori linearmente indipendenti?

Sì, poiché la matrice formata dai 4 vettori coincide (a meno di una trasposizione) con la matrice del punto c), con $k = 0$, ed essa ha la caratteristica uguale a 3.

c) Si consideri ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ k-2 & k-3 & -k+5 & k-1 \\ 2k-4 & k-2 & k-2 & k+2 \\ 3 & -k+4 & 3k-6 & -k+10 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro k.

Eliminando le prime due colonne e la seconda e la quarta riga si ottiene una matrice quadrata di ordine 2 con il determinante non nullo. Quindi car $A \geq 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Il determinante di A è nullo, quindi car $A \leq 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Calcolando poi il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando l'ultima riga e la prima colonna si scopre che car $A = 3$ se $k \neq 3$ e $k \neq 4$. Rimangono quindi da analizzare i casi $k = 3$ e $k = 4$, per i quali è facile scoprire che car $A = 2$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(0,1,-1)$, il piano π_1 di equazione $2x+y-5z-1=0$ e la retta

$$r: \quad \begin{cases} x = -3+2t \\ y = 2+t \\ z = -1+t \end{cases}$$

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π_1.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta = \frac{|2x_A + y_A - 5z_A - 1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

b) Si mostri che r è contenuta nel piano π_1.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_1 ed osservare che si ottiene un'identità.

c) Si scriva l'equazione del piano π_2 parallelo a π_1 e passante per il punto A.

Tale equazione è ovviamente data da $2(x-0)+1(y-1)-5(z+1)=0$, ossia $2x+y-5z-6=0$.

d) Si scriva l'equazione del piano π_3 contenente r ed ortogonale a π_1.

La direzione ortogonale al piano cercato è data da $\underline{n}_3 = \underline{n}_1 \wedge \underline{v}$, dove $\underline{n}_1 = (2,1,-5)$ è la direzione ortogonale al piano π_1, mentre $v=(2,1,1)$ è il vettore direzionale di r. Si trova quindi che $\underline{n}_3 = (6,-12,0)$, cosicché come direzione ortogonale a π_3 si può scegliere il vettore $(1,-2,0)$. Poiché il punto $P(-3,2,-1)$ appartiene alla retta r, il piano cercato ha equazione $1(x+3)-2(y-2)=0$, ossia $x-2y+7=0$.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 - 12xz + 12x - 24z - 12 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & -36 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x=-2$, $y=0$, $z=-2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(-2,0,-2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -12 \\ 6 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x - 6z + 6 = 0 \\ -36y = 0 \\ -6x - 12 = 0 \\ 6x - 12z - 12 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(-2, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2, 0, 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - 4z - 2 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Parte comune

Esercizio 4. Calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -11 & -12 \\ -4 & 12 & 15 \\ 4 & -10 & -13 \end{pmatrix}$$

e precisare se la matrice è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico risulta essere

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = -1$ (doppio) e $\lambda_2 = 2$ (semplice). Gli autovettori per l'autovalore λ_1 sono i vettori (non nulli) della forma

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la matrice risulta quindi non diagonalizzabile. Gli autovettori per l'autovalore λ_2 sono i vettori (non nulli) della forma

$$a \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
18 luglio 2012 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 2 ore per il compitino. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -3, -6, 3),\ \underline{v}_2 = (0, -4, -3, 5),\ \underline{v}_3 = (2, 6, -3, -9),\ \underline{v}_4 = (2, -2, 1, 11)\ .$$

a) È possibile estrarre da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ una coppia di vettori linearmente indipendenti?

Sì, per esempio è facile vedere che $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Oppure si può sfruttare il risultato del punto c), con $k = 0$.

b) È possibile estrarre da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ una terna di vettori linearmente indipendenti?

Sì, poiché la matrice formata dai 4 vettori coincide (a meno di una trasposizione) con la matrice del punto c), con $k = 0$, ed essa ha la caratteristica uguale a 3.

c) Si consideri ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ k-3 & k-4 & -k+6 & k-2 \\ 2k-6 & k-3 & k-3 & k+1 \\ 3 & -k+5 & 3k-9 & -k+11 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro k.

Eliminando le prime due colonne e la seconda e la quarta riga si ottiene una matrice quadrata di ordine 2 con il determinante non nullo. Quindi $\operatorname{car} A \geq 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Il determinante di A è nullo, quindi $\operatorname{car} A \leq 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Calcolando poi il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando l'ultima riga e la prima colonna si scopre che $\operatorname{car} A = 3$ se $k \neq 4$ e $k \neq 5$. Rimangono quindi da analizzare i casi $k = 4$ e $k = 5$, per i quali è facile scoprire che $\operatorname{car} A = 2$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(0,1,1)$, il piano π_1 di equazione $2x+y-5z-1=0$ e la retta

$$r: \quad \begin{cases} x = 7+2t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases}$$

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π_1.

   Basta utilizzare la formula:

$$\delta = \frac{|2x_A + y_A - 5z_A - 1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

b) Si mostri che r è contenuta nel piano π_1.

   Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_1 ed osservare che si ottiene un'identità.

c) Si scriva l'equazione del piano π_2 parallelo a π_1 e passante per il punto A.

   Tale equazione è ovviamente data da $2(x-0)+1(y-1)-5(z-1)=0$, ossia $2x+y-5z+4=0$.

d) Si scriva l'equazione del piano π_3 contenente r ed ortogonale a π_1.

   La direzione ortogonale al piano cercato è data da $\underline{n}_3 = \underline{n}_1 \wedge \underline{v}$, dove $\underline{n}_1 = (2,1,-5)$ è la direzione ortogonale al piano π_1, mentre $v=(2,1,1)$ è il vettore direzionale di r. Si trova quindi che $\underline{n}_3 = (6,-12,0)$, cosicché come direzione ortogonale a π_3 si può scegliere il vettore $(1,-2,0)$. Poiché il punto $P(7,2,3)$ appartiene alla retta r, il piano cercato ha equazione $1(x-7)-2(y-2)=0$, ossia $x-2y-3=0$.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 - 3z^2 + 6xz - 6x - 18z - 15 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

   Basta risolvere il sistema

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & -36 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

   Si trova facilmente l'unica soluzione $x=1$, $y=0$, $z=-2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(1,0,-2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -9 \\ -3 & 0 & -9 & -15 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x + 3z - 3 = 0 \\ -36y = 0 \\ 3x - 3z - 9 = 0 \\ -3x - 9z - 15 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(1, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2, 0, 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - z - 5 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Parte comune

Esercizio 4. Calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 28 & -9 \\ -6 & 17 & -5 \\ -7 & 17 & -4 \end{pmatrix}$$

e precisare se la matrice è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico risulta essere

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = 1$ (doppio) e $\lambda_2 = 2$ (semplice). Gli autovettori per l'autovalore λ_1 sono i vettori (non nulli) della forma

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la matrice risulta quindi non diagonalizzabile. Gli autovettori per l'autovalore λ_2 sono i vettori (non nulli) della forma

$$a \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
18 luglio 2012 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 2 ore per il compitino. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -1, -2, 3),\ \underline{v}_2 = (0, -2, -1, 3),\ \underline{v}_3 = (2, 4, -1, -3),\ \underline{v}_4 = (2, 0, 3, 9)\ .$$

a) È possibile estrarre da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ una coppia di vettori linearmente indipendenti?

   Sì, per esempio è facile vedere che $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Oppure si può sfruttare il risultato del punto c), con $k = 0$.

b) È possibile estrarre da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ una terna di vettori linearmente indipendenti?

   Sì, poiché la matrice formata dai 4 vettori coincide (a meno di una trasposizione) con la matrice del punto c), con $k = 0$, ed essa ha la caratteristica uguale a 3.

c) Si consideri ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ k-1 & k-2 & -k+4 & k \\ 2k-2 & k-1 & k-1 & k+3 \\ 3 & -k+3 & 3k-3 & -k+9 \end{pmatrix} .$$

   Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro k.

   Eliminando le prime due colonne e la seconda e la quarta riga si ottiene una matrice quadrata di ordine 2 con il determinante non nullo. Quindi car $A \geq 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Il determinante di A è nullo, quindi car $A \leq 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Calcolando poi il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando l'ultima riga e la prima colonna si scopre che car $A = 3$ se $k \neq 2$ e $k \neq 3$. Rimangono quindi da analizzare i casi $k = 2$ e $k = 3$, per i quali è facile scoprire che car $A = 2$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(0,1,-2)$, il piano π_1 di equazione $2x+y-5z-1=0$ e la retta

$$r: \quad \begin{cases} x = -8+2t \\ y = 2+t \\ z = -3+t \end{cases}$$

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π_1.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta = \frac{|2x_A + y_A - 5z_A - 1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}} = 2\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

b) Si mostri che r è contenuta nel piano π_1.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_1 ed osservare che si ottiene un'identità.

c) Si scriva l'equazione del piano π_2 parallelo a π_1 e passante per il punto A.

Tale equazione è ovviamente data da $2(x-0)+1(y-1)-5(z+2)=0$, ossia $2x+y-5z-11=0$.

d) Si scriva l'equazione del piano π_3 contenente r ed ortogonale a π_1.

La direzione ortogonale al piano cercato è data da $\underline{n}_3 = \underline{n}_1 \wedge \underline{v}$, dove $\underline{n}_1 = (2,1,-5)$ è la direzione ortogonale al piano π_1, mentre $v=(2,1,1)$ è il vettore direzionale di r. Si trova quindi che $\underline{n}_3 = (6,-12,0)$, cosicché come direzione ortogonale a π_3 si può scegliere il vettore $(1,-2,0)$. Poiché il punto $P(-8,2,-3)$ appartiene alla retta r, il piano cercato ha equazione $1(x+8)-2(y-2)=0$, ossia $x-2y+12=0$.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 + 12xz - 12x - 24z - 12 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & -36 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x=2$, $y=0$, $z=-2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(2,0,-2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -12 \\ -6 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x + 6z - 6 = 0 \\ -36y = 0 \\ 6x - 12 = 0 \\ -6x - 12z - 12 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(2, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2, 0, 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - 6 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Parte comune

Esercizio 4. Calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -24 & 10 \\ 2 & -18 & 10 \\ -36 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

e precisare se la matrice è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico risulta essere

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda$$

Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = -2$ (semplice), $\lambda_2 = 0$ (semplice) e $\lambda_3 = 2$ (semplice). Essendo tutti gli autovalori semplici, la matrice è diagonalizzabile. Gli autovettori per l'autovalore λ_1 sono i vettori (non nulli) della forma

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gli autovettori per l'autovalore λ_2 sono i vettori (non nulli) della forma

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Gli autovettori per l'autovalore λ_3 sono i vettori (non nulli) della forma

$$a \begin{pmatrix} -5 \\ -15 \\ -29 \end{pmatrix}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
18 luglio 2012 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 2 ore per il compitino. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -4, -8, 3),\ \underline{v}_2 = (0, -5, -4, 6),\ \underline{v}_3 = (2, 7, -4, -12),\ \underline{v}_4 = (2, -3, 0, 12)\ .$$

a) È possibile estrarre da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ una coppia di vettori linearmente indipendenti?

Sì, per esempio è facile vedere che $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Oppure si può sfruttare il risultato del punto c), con $k = 0$.

b) È possibile estrarre da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ una terna di vettori linearmente indipendenti?

Sì, poiché la matrice formata dai 4 vettori coincide (a meno di una trasposizione) con la matrice del punto c), con $k = 0$, ed essa ha la caratteristica uguale a 3.

c) Si consideri ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ k-4 & k-5 & -k+7 & k-3 \\ 2k-8 & k-4 & k-4 & k \\ 3 & -k+6 & 3k-12 & -k+12 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro k.

Eliminando le prime due colonne e la seconda e la quarta riga si ottiene una matrice quadrata di ordine 2 con il determinante non nullo. Quindi $\operatorname{car} A \geq 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Il determinante di A è nullo, quindi $\operatorname{car} A \leq 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Calcolando poi il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando l'ultima riga e la prima colonna si scopre che $\operatorname{car} A = 3$ se $k \neq 5$ e $k \neq 6$. Rimangono quindi da analizzare i casi $k = 5$ e $k = 6$, per i quali è facile scoprire che $\operatorname{car} A = 2$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(0,1,2)$, il piano π_1 di equazione $2x+y-5z-1=0$ e la retta

$$r: \quad \begin{cases} x = 12+2t \\ y = 2+t \\ z = 5+t \end{cases}$$

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π_1.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta = \frac{|2x_A + y_A - 5z_A - 1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}} = 2\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

b) Si mostri che r è contenuta nel piano π_1.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_1 ed osservare che si ottiene un'identità.

c) Si scriva l'equazione del piano π_2 parallelo a π_1 e passante per il punto A.

Tale equazione è ovviamente data da $2(x-0)+1(y-1)-5(z-2)=0$, ossia $2x+y-5z+9=0$.

d) Si scriva l'equazione del piano π_3 contenente r ed ortogonale a π_1.

La direzione ortogonale al piano cercato è data da $\underline{n}_3 = \underline{n}_1 \wedge \underline{v}$, dove $\underline{n}_1 = (2,1,-5)$ è la direzione ortogonale al piano π_1, mentre $v=(2,1,1)$ è il vettore direzionale di r. Si trova quindi che $\underline{n}_3 = (6,-12,0)$, cosicché come direzione ortogonale a π_3 si può scegliere il vettore $(1,-2,0)$. Poiché il punto $P(12,2,5)$ appartiene alla retta r, il piano cercato ha equazione $1(x-12)-2(y-2)=0$, ossia $x-2y-8=0$.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 - 3z^2 - 6xz + 6x - 18z - 15 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & -36 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x=-1$, $y=0$, $z=-2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(-1,0,-2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & -9 & -15 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x - 3z + 3 = 0 \\ -36y = 0 \\ -3x - 3z - 9 = 0 \\ 3x - 9z - 15 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(-1, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2, 0, 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - 3z - 3 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Parte comune

Esercizio 4. Calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -30 & -11 & 5 \\ -30 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

e precisare se la matrice è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico risulta essere

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda$$

Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = -1$ (doppio) e $\lambda_2 = 0$ (semplice). Gli autovettori per l'autovalore λ_1 sono i vettori (non nulli) della forma

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

la matrice risulta quindi diagonalizzabile. Gli autovettori per l'autovalore λ_2 sono i vettori (non nulli) della forma

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$