Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
18 luglio 2012 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione

$$\big((3+2i)z^2+(4+i)\bar{z}\big)\big((3-2i)z^2+(-4+i)\bar{z}\big)=13z^4-17\bar{z}^2+1+i$$

Sviluppando il prodotto i termini in z^4 e $\bar{z}^2$ si semplificano e l'equazione diventa

$$-10iz^2\bar{z}=1+i$$

Questa equazione si risolve senza nessuna difficoltà usando il modulo e l'argomento di z. L'equazione ha un'unica soluzione.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(0,1,-1)$, il piano π_1 di equazione $2x+y-5z-1=0$ e la retta

$$r:\quad \begin{cases} x=-3+2t \\ y=2+t \\ z=-1+t \end{cases}$$

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π_1.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta=\frac{|2x_A+y_A-5z_A-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}}=\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

b) Si mostri che r è contenuta nel piano π_1.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_1 ed osservare che si ottiene un'identità.

c) Si scriva l'equazione del piano π_2 parallelo a π_1 e passante per il punto A.

Tale equazione è ovviamente data da $2(x-0)+1(y-1)-5(z+1)=0$, ossia $2x+y-5z-6=0$.

d) Si scriva l'equazione del piano π_3 contenente r ed ortogonale a π_1.

La direzione ortogonale al piano cercato è data da $\underline{n}_3=\underline{n}_1\wedge\underline{v}$, dove $\underline{n}_1=(2,1,-5)$ è la direzione ortogonale al piano π_1, mentre $v=(2,1,1)$ è il vettore direzionale di r. Si trova quindi che $\underline{n}_3=(6,-12,0)$, cosicché come direzione ortogonale a π_3 si può scegliere il vettore $(1,-2,0)$. Poiché il punto $P(-3,2,-1)$ appartiene alla retta r, il piano cercato ha equazione $1(x+3)-2(y-2)=0$, ossia $x-2y+7=0$.

Esercizio 3. Si ricorda che $\mathbb{R}_3[x]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Sia

$$\begin{aligned} f:&\mathbb{R}_3[x]\longrightarrow\mathbb{R}_3[x]\\ &P\quad\longmapsto P(x+1)+xP'(x)\end{aligned}$$

a) Verificare che f è un'applicazione lineare.

Basta verificare la definizione.

b) Siano $\mathcal{B}_1=\{1,x,x^2,x^3\}$ e $\mathcal{B}_2=\{1,x+1,x^2+x+1,x^3+x^2+x+1\}$ due basi di $\mathbb{R}_3[x]$ (non si chiede di verificare che sono effettivamente delle basi di $\mathbb{R}_3[x]$). Calcolare la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}_1$ (base di partenza) e $\mathcal{B}_2$ (base di arrivo).

Calcoliamo l'immagine di ciascuno dei vettori della base di partenza e le sue coordinate nella base di arrivo.

$$\begin{aligned}
f(1)&=1+x.0=1\\
&=1.1+0.(x+1)+0.(x^2+x+1)+0.(x^3+x^2+x+1)\\
f(x)&=x+1+x.1=2x+1\\
&=-1.1+2.(x+1)+0.(x^2+x+1)+0.(x^3+x^2+x+1)\\
f(x^2)&=(x+1)^2+x.2x=3x^2+2x+1\\
&=-1.1-1.(x+1)+3.(x^2+x+1)+0.(x^3+x^2+x+1)\\
f(x^3)&=(x+1)^3+x.3x^2=4x^3+3x^2+3x+1\\
&=-2.1+0.(x+1)-1.(x^2+x+1)+4.(x^3+x^2+x+1)
\end{aligned}$$

La matrice risulta quindi essere

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2\\0&2&-1&0\\0&0&3&-1\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 - 12xz + 12x - 24z - 12 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & -36 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} .$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x = -2$, $y = 0$, $z = -2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(-2, 0, -2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -12 \\ 6 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x - 6z + 6 = 0 \\ -36y = 0 \\ -6x - 12 = 0 \\ 6x - 12z - 12 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(-2, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2,0,1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2,0,1,1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - 4z - 2 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
18 luglio 2012 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione

$$\big((4+i)z^2+(3+5i)\bar{z}\big)\big((4-i)z^2+(-3+5i)\bar{z}\big)=17z^4-34\bar{z}^2+1+i$$

Sviluppando il prodotto i termini in z^4 e $\bar{z}^2$ si semplificano e l'equazione diventa

$$34iz^2\bar{z}=1+i$$

Questa equazione si risolve senza nessuna difficoltà usando il modulo e l'argomento di z. L'equazione ha un'unica soluzione.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(0,1,1)$, il piano π_1 di equazione $2x+y-5z-1=0$ e la retta

$$r: \quad \begin{cases} x=7+2t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$$

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π_1.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta=\frac{|2x_A+y_A-5z_A-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}}=\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

b) Si mostri che r è contenuta nel piano π_1.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_1 ed osservare che si ottiene un'identità.

c) Si scriva l'equazione del piano π_2 parallelo a π_1 e passante per il punto A.

Tale equazione è ovviamente data da $2(x-0)+1(y-1)-5(z-1)=0$, ossia $2x+y-5z+4=0$.

d) Si scriva l'equazione del piano π_3 contenente r ed ortogonale a π_1.

La direzione ortogonale al piano cercato è data da $\underline{n}_3 = \underline{n}_1 \wedge \underline{v}$, dove $\underline{n}_1 = (2,1,-5)$ è la direzione ortogonale al piano π_1, mentre $v=(2,1,1)$ è il vettore direzionale di r. Si trova quindi che $\underline{n}_3 = (6,-12,0)$, cosicché come direzione ortogonale a π_3 si può scegliere il vettore $(1,-2,0)$. Poiché il punto $P(7,2,3)$ appartiene alla retta r, il piano cercato ha equazione $1(x-7)-2(y-2)=0$, ossia $x-2y-3=0$.

Esercizio 3. Si ricorda che $\mathbb{R}_3[x]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Sia

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ & P \longmapsto P(x+2)+xP'(x) \end{aligned}$$

a) Verificare che f è un'applicazione lineare.

Basta verificare la definizione.

b) Siano $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, x+1, x^2+x+1, x^3+x^2+x+1\}$ due basi di $\mathbb{R}_3[x]$ (non si chiede di verificare che sono effettivamente delle basi di $\mathbb{R}_3[x]$). Calcolare la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}_1$ (base di partenza) e $\mathcal{B}_2$ (base di arrivo).

Calcoliamo l'immagine di ciascuno dei vettori della base di partenza e le sue coordinate nella base di arrivo.

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 + x.0 = 1 \\
&= 1.1 + 0.(x+1) + 0.(x^2+x+1) + 0.(x^3+x^2+x+1) \\
f(x) &= x+2+x.1 = 2x+2 \\
&= 0.1 + 2.(x+1) + 0.(x^2+x+1) + 0.(x^3+x^2+x+1) \\
f(x^2) &= (x+2)^2 + x.2x = 3x^2+4x+4 \\
&= 0.1 + 1.(x+1) + 3.(x^2+x+1) + 0.(x^3+x^2+x+1) \\
f(x^3) &= (x+2)^3 + x.3x^2 = 4x^3+6x^2+12x+8 \\
&= -4.1 + 6.(x+1) + 2.(x^2+x+1) + 4.(x^3+x^2+x+1)
\end{aligned}$$

La matrice risulta quindi essere

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 - 3z^2 + 6xz - 6x - 18z - 15 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & -36 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} .$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(1, 0, -2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -9 \\ -3 & 0 & -9 & -15 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x + 3z - 3 = 0 \\ -36y = 0 \\ 3x - 3z - 9 = 0 \\ -3x - 9z - 15 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(1, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2, 0, 1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - z - 5 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
18 luglio 2012 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione

$$\big((2+3i)z^2+(6+4i)\bar{z}\big)\big((2-3i)z^2+(-6+4i)\bar{z}\big)=13z^4-52\bar{z}^2+1+i$$

Sviluppando il prodotto i termini in z^4 e $\bar{z}^2$ si semplificano e l'equazione diventa

$$-20iz^2\bar{z}=1+i$$

Questa equazione si risolve senza nessuna difficoltà usando il modulo e l'argomento di z. L'equazione ha un'unica soluzione.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(0,1,-2)$, il piano π_1 di equazione $2x+y-5z-1=0$ e la retta

$$r:\quad \begin{cases} x=-8+2t \\ y=2+t \\ z=-3+t \end{cases}$$

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π_1.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta=\frac{|2x_A+y_A-5z_A-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}}=2\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

b) Si mostri che r è contenuta nel piano π_1.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_1 ed osservare che si ottiene un'identità.

c) Si scriva l'equazione del piano π_2 parallelo a π_1 e passante per il punto A.

Tale equazione è ovviamente data da $2(x-0)+1(y-1)-5(z+2)=0$, ossia $2x+y-5z-11=0$.

d) Si scriva l'equazione del piano π_3 contenente r ed ortogonale a π_1.

La direzione ortogonale al piano cercato è data da $\underline{n}_3 = \underline{n}_1 \wedge \underline{v}$, dove $\underline{n}_1 = (2,1,-5)$ è la direzione ortogonale al piano π_1, mentre $v = (2,1,1)$ è il vettore direzionale di r. Si trova quindi che $\underline{n}_3 = (6,-12,0)$, cosicché come direzione ortogonale a π_3 si può scegliere il vettore $(1,-2,0)$. Poiché il punto $P(-8,2,-3)$ appartiene alla retta r, il piano cercato ha equazione $1(x+8)-2(y-2)=0$, ossia $x-2y+12=0$.

Esercizio 3. Si ricorda che $\mathbb{R}_3[x]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Sia

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ &P \quad \longmapsto P(x+3)+xP'(x) \end{aligned}$$

a) Verificare che f è un'applicazione lineare.

Basta verificare la definizione.

b) Siano $\mathcal{B}_1 = \{1,x,x^2,x^3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, x+1, x^2+x+1, x^3+x^2+x+1\}$ due basi di $\mathbb{R}_3[x]$ (non si chiede di verificare che sono effettivamente delle basi di $\mathbb{R}_3[x]$). Calcolare la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}_1$ (base di partenza) e $\mathcal{B}_2$ (base di arrivo).

Calcoliamo l'immagine di ciascuno dei vettori della base di partenza e le sue coordinate nella base di arrivo.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + x.0 = 1 \\ &= 1.1 + 0.(x+1) + 0.(x^2+x+1) + 0.(x^3+x^2+x+1) \\ f(x) &= x+3+x.1 = 2x+3 \\ &= 1.1 + 2.(x+1) + 0.(x^2+x+1) + 0.(x^3+x^2+x+1) \\ f(x^2) &= (x+3)^2 + x.2x = 3x^2+6x+9 \\ &= 3.1 + 3.(x+1) + 3.(x^2+x+1) + 0.(x^3+x^2+x+1) \\ f(x^3) &= (x+3)^3 + x.3x^2 = 4x^3+9x^2+27x+27 \\ &= 0.1 + 18.(x+1) + 5.(x^2+x+1) + 4.(x^3+x^2+x+1) \end{aligned}$$

La matrice risulta quindi essere

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 + 12xz - 12x - 24z - 12 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & -36 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} .$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x = 2$, $y = 0$, $z = -2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(2, 0, -2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -12 \\ -6 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x + 6z - 6 = 0 \\ -36y = 0 \\ 6x - 12 = 0 \\ -6x - 12z - 12 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(2, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2,0,1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2,0,1,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - 6 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
18 luglio 2012 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione

$$\big((1+3i)z^2+(5+2i)\bar{z}\big)\big((1-3i)z^2+(-5+2i)\bar{z}\big)=10z^4-29\bar{z}^2+1+i$$

Sviluppando il prodotto i termini in z^4 e $\bar{z}^2$ si semplificano e l'equazione diventa

$$-26iz^2\bar{z}=1+i$$

Questa equazione si risolve senza nessuna difficoltà usando il modulo e l'argomento di z. L'equazione ha un'unica soluzione.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(0,1,2)$, il piano π_1 di equazione $2x+y-5z-1=0$ e la retta

$$r:\quad\begin{cases} x=12+2t \\ y=2+t \\ z=5+t \end{cases}$$

a) Si calcoli la distanza δ tra A e π_1.

Basta utilizzare la formula:

$$\delta=\frac{|2x_A+y_A-5z_A-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}}=2\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

b) Si mostri che r è contenuta nel piano π_1.

Basta sostituire le equazioni di r in quella di π_1 ed osservare che si ottiene un'identità.

c) Si scriva l'equazione del piano π_2 parallelo a π_1 e passante per il punto A.

Tale equazione è ovviamente data da $2(x-0)+1(y-1)-5(z-2)=0$, ossia $2x+y-5z+9=0$.

d) Si scriva l'equazione del piano π_3 contenente r ed ortogonale a π_1.

La direzione ortogonale al piano cercato è data da $\underline{n}_3 = \underline{n}_1 \wedge \underline{v}$, dove $\underline{n}_1 = (2,1,-5)$ è la direzione ortogonale al piano π_1, mentre $v = (2,1,1)$ è il vettore direzionale di r. Si trova quindi che $\underline{n}_3 = (6,-12,0)$, cosicché come direzione ortogonale a π_3 si può scegliere il vettore $(1,-2,0)$. Poiché il punto $P(12,2,5)$ appartiene alla retta r, il piano cercato ha equazione $1(x-12)-2(y-2)=0$, ossia $x-2y-8=0$.

Esercizio 3. Si ricorda che $\mathbb{R}_3[x]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Sia

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ &P \quad\longmapsto P(x+4)+xP'(x) \end{aligned}$$

a) Verificare che f è un'applicazione lineare.

Basta verificare la definizione.

b) Siano $\mathcal{B}_1 = \{1,x,x^2,x^3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, x+1, x^2+x+1, x^3+x^2+x+1\}$ due basi di $\mathbb{R}_3[x]$ (non si chiede di verificare che sono effettivamente delle basi di $\mathbb{R}_3[x]$). Calcolare la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}_1$ (base di partenza) e $\mathcal{B}_2$ (base di arrivo).

Calcoliamo l'immagine di ciascuno dei vettori della base di partenza e le sue coordinate nella base di arrivo.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + x.0 = 1 \\ &= 1.1 + 0.(x+1) + 0.(x^2+x+1) + 0.(x^3+x^2+x+1) \\ f(x) &= x+4+x.1 = 2x+4 \\ &= 2.1 + 2.(x+1) + 0.(x^2+x+1) + 0.(x^3+x^2+x+1) \\ f(x^2) &= (x+4)^2 + x.2x = 3x^2+8x+16 \\ &= 8.1 + 5.(x+1) + 3.(x^2+x+1) + 0.(x^3+x^2+x+1) \\ f(x^3) &= (x+4)^3 + x.3x^2 = 4x^3+12x^2+48x+64 \\ &= 16.1 + 36.(x+1) + 8.(x^2+x+1) + 4.(x^3+x^2+x+1) \end{aligned}$$

La matrice risulta quindi essere

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 16 \\ 0 & 2 & 5 & 36 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$9x^2 - 36y^2 - 3z^2 - 6xz + 6x - 18z - 15 = 0 \ .$$

a) Determinare (se esiste) il centro di σ.

Basta risolvere il sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & -36 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} .$$

Si trova facilmente l'unica soluzione $x = -1$, $y = 0$, $z = -2$. Quindi il centro di σ è il punto $C(-1, 0, -2)$.

b) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & -9 & -15 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 9x - 3z + 3 = 0 \\ -36y = 0 \\ -3x - 3z - 9 = 0 \\ 3x - 9z - 15 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(-1, 0, -2)$. Quindi il centro C è l'unico punto doppio di σ.

c) Dopo aver verificato che il punto $P(2,0,1)$ appartiene a σ, scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel punto P.

Per effettuare la verifica richiesta basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di σ. Il piano cercato ha poi equazione

$$(2,0,1,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $3x - 3z - 3 = 0$.

d) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

ATTENZIONE! Non sono richieste né la forma canonica, né la trasformazione che porta σ in forma canonica.