Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
22 giugno 2012 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 2 ore per il compitino. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino i sottoinsiemi

$$S_k = \{(k+s, 3t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\}$$

di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,2,0), \qquad \underline{v}_2 = (0,3,0,1), \qquad \underline{v}_3 = (0,-1,3,0).$$

Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) S_k è un sottospazio se e solo se $k=0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esistono $s,t,u \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} k+s=0 \\ 3t-u=0 \\ 2s+3u=0 \\ t=0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k=0$. Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(s, 3t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,0,2,0) + t(0,3,0,1) + u(0,-1,3,0) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,2,0), (0,3,0,1), (0,-1,3,0) \rangle \\ &= \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

La matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la penultima colonna è diverso da zero. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti.

c) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ formano una base del sottospazio S_0.

Bisogna anzitutto osservare che i tre vettori appartengono ad S_0. Ma nel punto a) abbiamo osservato che essi *generano* S_0. Nel punto b) abbiamo inoltre dimostrato che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Possiamo pertanto concludere che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_0.

Esercizio 2. Nel seguente sistema, x, y, z e t sono le incognite e a un parametro reale.

$$\begin{cases} x+3y-2z+3t = 2 \\ 2x+ay+z-2t = 0 \\ 5x+8y-5z+7t = 5 \end{cases}$$

Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema al variare del parametro a.

Osserviamo innanzittutto che nella prima equazione il coefficiente di x è 1 e quindi è verosimilmente conveniente usare la tecnica di Gauss per eliminare la x delle due altre equazioni. Nella soluzione saranno indicati i passi intermedi sia per la versione originale del sistema che quelli per la versione semplificata (con un indice s per le matrici).
La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & a & 1 & -2 \\ 5 & 8 & -5 & 7 \end{pmatrix} \text{ o } A_s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & a-6 & 5 & -8 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ o } \underline{v}_s = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la versione semplificata con il metodo di Gauss ci dà le indicazioni sulla caratteristica della matrice dei coefficienti: i coefficienti delle 2 ultime equazioni sono praticamente uguali.
Il numero di incognite è 4.

Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti. In tutti i casi la caratteristica è almeno 1 perché un coefficiente di A (o A_s) è non nullo. Inoltre la caratteristica è almeno 2 perché la terza equazione non è proporzionale alla prima. Operativamente, il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna e prima e terza riga è 5. Il determinante della sottomatrice dei coefficienti costituita dalla prima, terza e quarta colonna è 0 quindi non possiamo concludere. Il determinante costituito dalla prima, seconda e terza colonna è $5a + 5$. Se tale determinante è diverso da 0, cioè se $a \neq -1$, la caratteristica di A (o A_s) è 3. Se invece è uguale a 0, cioè se $a = -1$, segue dal teorema di Kronecker che la caratterisitica di A (o A_s) è 2.
Se $a \neq -1$ la caratteristica della matrice completa è per forza 3. Se invece $a = -1$, dal teorema di Kronecker, la caratteristica della matrice completa sarà 2 se e solo se il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna di A e il vettore $\underline{v}$ (o la prima e la terza colonna di A_s e il vettore $\underline{v}_s$) è uguale a 0. Tale determinante è $7 \neq 0$ quindi la matrice completa ha caratteristica 3.
In conclusione grazie al teorema di Rouché–Capelli possiamo concludere.

- Se $a \neq -1$ la matrice dei coefficienti (e quindi la matrice completa) hanno caratteristica 3, il sistema è indeterminato con soluzione che dipende da $4 - 3 = 1$ parametro (una retta di soluzioni).

- Se $a = -1$ la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2 ma la matrice completa ha caratteristica 3 il sistema è quindi impossibile.

Osserviamo che usando il metodo di Gauss il calcolo delle caratteristiche era molto più veloce perché le due ultime equazioni risultavano quasi identiche.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3. Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -3 \\ 8 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Non ci sono particolari problemi. Il polinomio caratteristico di A è il polinomio

$$P_A(X) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

di cui le radici sono 1 (doppia) e 2.
L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 1$ è generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Parte comune

Esercizio 4. Si consideri la conica γ di equazione

$$5x^2 + 6\sqrt{3}\,xy - y^2 - 16\sqrt{3}\,x - 16y + 24 = 0 .$$

a) Si determinino le coordinate (x_C, y_C) del centro (se esiste) e la forma canonica di γ.

Eliminiamo il termine $6\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizziamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = -4$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 - 8\sqrt{3}(\sqrt{3}\,x' - y') - 8(x' + \sqrt{3}\,y') + 24 = 0,$$

ossia

$$(x')^2 - \frac{(y')^2}{2} - 4x' + 3 = 0.$$

Quest'ultima si può riscrivere come

$$(x' - 2)^2 - \frac{(y')^2}{2} = 1,$$

cosicché la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $(x'')^2 - (y'')^2/-2 = 1$. Si tratta pertanto di un'iperbole, il cui centro ha coordinate $x'_C = 2$, $y'_C = 0$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = \sqrt{3}$, $y_C = 1$.

Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8\sqrt{3} \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si scriva la trasformazione di coordinate che porta γ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta γ dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova pertanto

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}[\sqrt{3}\,(x''+2) - y''] = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'' - y'') + \sqrt{3} \\ y = \frac{1}{2}[(x''+2) + \sqrt{3}\,y''] = \frac{1}{2}(x'' + \sqrt{3}\,y'') + 1 \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
22 giugno 2012 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 2 ore per il compitino. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino i sottoinsiemi

$$S_k = \{(k+s, t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\}$$

di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,2,0), \qquad \underline{v}_2 = (0,1,0,1), \qquad \underline{v}_3 = (0,-1,3,0).$$

Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) S_k è un sottospazio se e solo se $k = 0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esistono $s,t,u \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} k+s=0 \\ t-u=0 \\ 2s+3u=0 \\ t=0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$. Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(s, t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,0,2,0) + t(0,1,0,1) + u(0,-1,3,0) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,2,0), (0,1,0,1), (0,-1,3,0) \rangle \\ &= \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

La matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la penultima colonna è diverso da zero. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti.

c) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ formano una base del sottospazio S_0.

Bisogna anzitutto osservare che i tre vettori appartengono ad S_0. Ma nel punto a) abbiamo osservato che essi *generano* S_0. Nel punto b) abbiamo inoltre dimostrato che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Possiamo pertanto concludere che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_0.

Esercizio 2. Nel seguente sistema, x, y, z e t sono le incognite e a un parametro reale.

$$\begin{cases} x + y - 2z - 2t = 0 \\ x + ay - 3z - 2t = -1 \\ x + 3y - z - 2t = 2 \end{cases}$$

Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema al variare del parametro a.

Osserviamo innanzittutto che nella prima equazione il coefficiente di x è 1 e quindi è verosimilmente conveniente usare la tecnica di Gauss per eliminare la x delle due altre equazioni. Nella soluzione saranno indicati i passi intermedi sia per la versione originale del sistema che quelli per la versione semplificata (con un indice s per le matrici).
La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ o } A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ o } \underline{v}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la versione semplificata con il metodo di Gauss ci dà le indicazioni sulla caratteristica della matrice dei coefficienti: i coefficienti delle 2 ultime equazioni sono praticamente uguali.
Il numero di incognite è 4.

Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti. In tutti i casi la caratteristica è almeno 1 perché un coefficiente di A (o A_s) è non nullo. Inoltre la caratteristica è almeno 2 perché la terza equazione non è proporzionale alla prima. Operativamente, il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna e prima e terza riga è 1. Il determinante della sottomatrice dei coefficienti costituita dalla prima, terza e quarta colonna è 0 quindi non possiamo concludere. Il determinante costituito dalla prima, seconda e terza colonna è $a + 1$. Se tale determinante è diverso da 0, cioè se $a \neq -1$, la caratteristica di A (o A_s) è 3. Se invece è uguale a 0, cioè se $a = -1$, segue dal teorema di Kronecker che la caratterisitica di A (o A_s) è 2.
Se $a \neq -1$ la caratteristica della matrice completa è per forza 3. Se invece $a = -1$, dal teorema di Kronecker, la caratteristica della matrice completa sarà 2 se e solo se il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna di A e il vettore $\underline{v}$ (o la prima e la terza colonna di A_s e il vettore $\underline{v}_s$) è uguale a 0. Tale determinante è $-2 \neq 0$ quindi la matrice completa ha caratteristica 3.
In conclusione grazie al teorema di Rouché–Capelli possiamo concludere.

- Se $a \neq -1$ la matrice dei coefficienti (e quindi la matrice completa) hanno caratteristica 3, il sistema è indeterminato con soluzione che dipende da $4 - 3 = 1$ parametro (una retta di soluzioni).

- Se $a = -1$ la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2 ma la matrice completa ha caratteristica 3 il sistema è quindi impossibile.

Osserviamo che usando il metodo di Gauss il calcolo delle caratteristiche era molto più veloce perché le due ultime equazioni risultavano quasi identiche.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3. Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ -44 & -22 & -12 \\ 24 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

Non ci sono particolari problemi. Il polinomio caratteristico di A è il polinomio

$$P_A(X) = x^3 - 4x$$

di cui le radici sono 0, -2 e 2 (senza ordine particolare).
L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 0$ è generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = -2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Parte comune

Esercizio 4. Si consideri la conica γ di equazione

$$-7x^2 - 2\sqrt{3}\,xy - 5y^2 + 16\sqrt{3}\,x + 16y - 24 = 0 .$$

a) Si determinino le coordinate (x_C, y_C) del centro (se esiste) e la forma canonica di γ.

Eliminiamo il termine $-2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizziamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = -4$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 8\sqrt{3}(\sqrt{3}\,x' - y') + 8(x' + \sqrt{3}\,y') - 24 = 0,$$

ossia

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{2} - 4x' + 3 = 0.$$

Quest'ultima si può riscrivere come

$$(x' - 2)^2 + \frac{(y')^2}{2} = 1,$$

cosicché la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $(x'')^2 + (y'')^2/2 = 1$. Si tratta pertanto di un'ellisse, il cui centro ha coordinate $x'_C = 2$, $y'_C = 0$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = \sqrt{3}$, $y_C = 1$.

Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8\sqrt{3} \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si scriva la trasformazione di coordinate che porta γ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta γ dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova pertanto

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}[\sqrt{3}\,(x'' + 2) - y''] = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'' - y'') + \sqrt{3} \\ y = \frac{1}{2}[(x'' + 2) + \sqrt{3}\,y''] = \frac{1}{2}(x'' + \sqrt{3}\,y'') + 1 \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
22 giugno 2012 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 2 ore per il compitino. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino i sottoinsiemi

$$S_k = \{(k+s, 4t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\}$$

di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,2,0), \qquad \underline{v}_2 = (0,4,0,1), \qquad \underline{v}_3 = (0,-1,3,0).$$

Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) S_k è un sottospazio se e solo se $k = 0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esistono $s,t,u \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} k+s=0 \\ 4t-u=0 \\ 2s+3u=0 \\ t=0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$. Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(s, 4t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,0,2,0) + t(0,4,0,1) + u(0,-1,3,0) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,2,0), (0,4,0,1), (0,-1,3,0) \rangle \\ &= \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

La matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la penultima colonna è diverso da zero. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti.

c) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ formano una base del sottospazio S_0.

Bisogna anzitutto osservare che i tre vettori appartengono ad S_0. Ma nel punto a) abbiamo osservato che essi *generano* S_0. Nel punto b) abbiamo inoltre dimostrato che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Possiamo pertanto concludere che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_0.

Esercizio 2. Nel seguente sistema, x, y, z e t sono le incognite e a un parametro reale.

$$\begin{cases} x+3y-z-t = 3 \\ 3x+ay-2z-t = 1 \\ 5x-9y-3z-t = -3 \end{cases}$$

Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema al variare del parametro a.

Osserviamo innanzittutto che nella prima equazione il coefficiente di x è 1 e quindi è verosimilmente conveniente usare la tecnica di Gauss per eliminare la x delle due altre equazioni. Nella soluzione saranno indicati i passi intermedi sia per la versione originale del sistema che quelli per la versione semplificata (con un indice s per le matrici).
La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & a & -2 & -1 \\ 5 & -9 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ o } A_s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & a-9 & 1 & 2 \\ 0 & -24 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ o } \underline{v}_s = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la versione semplificata con il metodo di Gauss ci dà le indicazioni sulla caratteristica della matrice dei coefficienti: i coefficienti delle 2 ultime equazioni sono praticamente uguali.
Il numero di incognite è 4.

Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti. In tutti i casi la caratteristica è almeno 1 perché un coefficiente di A (o A_s) è non nullo. Inoltre la caratteristica è almeno 2 perché la terza equazione non è proporzionale alla prima. Operativamente, il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna e prima e terza riga è 2. Il determinante della sottomatrice dei coefficienti costituita dalla prima, terza e quarta colonna è 0 quindi non possiamo concludere. Il determinante costituito dalla prima, seconda e terza colonna è $2a + 6$. Se tale determinante è diverso da 0, cioè se $a \neq -3$, la caratteristica di A (o A_s) è 3. Se invece è uguale a 0, cioè se $a = -3$, segue dal teorema di Kronecker che la caratterisitica di A (o A_s) è 2.
Se $a \neq -3$ la caratteristica della matrice completa è per forza 3. Se invece $a = -3$, dal teorema di Kronecker, la caratteristica della matrice completa sarà 2 se e solo se il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna di A e il vettore $\underline{v}$ (o la prima e la terza colonna di A_s e il vettore $\underline{v}_s$) è uguale a 0. Tale determinante è $24 \neq 0$ quindi la matrice completa ha caratteristica 3.
In conclusione grazie al teorema di Rouché–Capelli possiamo concludere.

- Se $a \neq -3$ la matrice dei coefficienti (e quindi la matrice completa) hanno caratteristica 3, il sistema è indeterminato con soluzione che dipende da $4 - 3 = 1$ parametro (una retta di soluzioni).

- Se $a = -3$ la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2 ma la matrice completa ha caratteristica 3 il sistema è quindi impossibile.

Osserviamo che usando il metodo di Gauss il calcolo delle caratteristiche era molto più veloce perché le due ultime equazioni risultavano quasi identiche.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3. Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -31 & -15 & -9 \\ 82 & 40 & 26 \\ -24 & -12 & -10 \end{pmatrix}$$

Non ci sono particolari problemi. Il polinomio caratteristico di A è il polinomio

$$P_A(X) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

di cui le radici sono -1, 2 e -2 (senza ordine particolare).
L'autospazio per l'autovalore $\lambda = -1$ è generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = -2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Parte comune

Esercizio 4. Si consideri la conica γ di equazione

$$2x^2 + 4\sqrt{3}\,xy - 2y^2 - 8\sqrt{3}\,x - 8y + 12 = 0 .$$

a) Si determinino le coordinate (x_C, y_C) del centro (se esiste) e la forma canonica di γ.

Eliminiamo il termine $4\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizziamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -4$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 4\sqrt{3}(\sqrt{3}\,x' - y') - 4(x' + \sqrt{3}\,y') + 12 = 0,$$

ossia

$$(x')^2 - (y')^2 - 4x' + 3 = 0.$$

Quest'ultima si può riscrivere come

$$(x' - 2)^2 - (y')^2 = 1,$$

cosicché la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $(x'')^2 - (y'')^2/-1 = 1$. Si tratta pertanto di un'iperbole, il cui centro ha coordinate $x'_C = 2$, $y'_C = 0$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = \sqrt{3}$, $y_C = 1$.

Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si scriva la trasformazione di coordinate che porta γ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta γ dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova pertanto

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}[\sqrt{3}\,(x''+2) - y''] = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'' - y'') + \sqrt{3} \\ y = \frac{1}{2}[(x''+2) + \sqrt{3}\,y''] = \frac{1}{2}(x'' + \sqrt{3}\,y'') + 1 \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
22 giugno 2012 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza per l'appello, 2 ore per il compitino. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino i sottoinsiemi

$$S_k = \{(k+s, 2t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\}$$

di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,2,0), \qquad \underline{v}_2 = (0,2,0,1), \qquad \underline{v}_3 = (0,-1,3,0).$$

Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) S_k è un sottospazio se e solo se $k = 0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esistono $s,t,u \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} k+s = 0 \\ 2t-u = 0 \\ 2s+3u = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$. Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(s, 2t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,0,2,0) + t(0,2,0,1) + u(0,-1,3,0) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,2,0), (0,2,0,1), (0,-1,3,0) \rangle \\ &= \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

La matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la penultima colonna è diverso da zero. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti.

c) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ formano una base del sottospazio S_0.

Bisogna anzitutto osservare che i tre vettori appartengono ad S_0. Ma nel punto a) abbiamo osservato che essi *generano* S_0. Nel punto b) abbiamo inoltre dimostrato che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Possiamo pertanto concludere che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_0.

Esercizio 2. Nel seguente sistema, x, y, z e t sono le incognite e a un parametro reale.

$$\begin{cases} x \quad +3z \; +t = -2 \\ 2x+ay-3z \quad = -1 \\ 4x \; -y+3z+2t = -6 \end{cases}$$

Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema al variare del parametro a.

Osserviamo innanzittutto che nella prima equazione il coefficiente di x è 1 e quindi è verosimilmente conveniente usare la tecnica di Gauss per eliminare la x delle due altre equazioni. Nella soluzione saranno indicati i passi intermedi sia per la versione originale del sistema che quelli per la versione semplificata (con un indice s per le matrici).
La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & a & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ o } A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & a & -9 & -2 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ o } \underline{v}_s = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la versione semplificata con il metodo di Gauss ci dà le indicazioni sulla caratteristica della matrice dei coefficienti: i coefficienti delle 2 ultime equazioni sono praticamente uguali.
Il numero di incognite è 4.

Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti. In tutti i casi la caratteristica è almeno 1 perché un coefficiente di A (o A_s) è non nullo. Inoltre la caratteristica è almeno 2 perché la terza equazione non è proporzionale alla prima. Operativamente, il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna e prima e terza riga è -9. Il determinante della sottomatrice dei coefficienti costituita dalla prima, terza e quarta colonna è 0 quindi non possiamo concludere. Il determinante costituito dalla prima, seconda e terza colonna è $-9a-9$. Se tale determinante è diverso da 0, cioè se $a \neq -1$, la caratteristica di A (o A_s) è 3. Se invece è uguale a 0, cioè se $a = -1$, segue dal teorema di Kronecker che la caratterisitica di A (o A_s) è 2.
Se $a \neq -1$ la caratteristica della matrice completa è per forza 3. Se invece $a = -1$, dal teorema di Kronecker, la caratteristica della matrice completa sarà 2 se e solo se il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna di A e il vettore $\underline{v}$ (o la prima e la terza colonna di A_s e il vettore $\underline{v}_s$) è uguale a 0. Tale determinante è $1 \neq 0$ quindi la matrice completa ha caratteristica 3.
In conclusione grazie al teorema di Rouché–Capelli possiamo concludere.

- Se $a \neq -1$ la matrice dei coefficienti (e quindi la matrice completa) hanno caratteristica 3, il sistema è indeterminato con soluzione che dipende da $4 - 3 = 1$ parametro (una retta di soluzioni).

- Se $a = -1$ la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2 ma la matrice completa ha caratteristica 3 il sistema è quindi impossibile.

Osserviamo che usando il metodo di Gauss il calcolo delle caratteristiche era molto più veloce perché le due ultime equazioni risultavano quasi identiche.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3. Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -50 & -24 & -20 \\ 92 & 44 & 36 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Non ci sono particolari problemi. Il polinomio caratteristico di A è il polinomio

$$P_A(X) = x^3 - 4x$$

di cui le radici sono -2, 0 e 2 (senza ordine particolare).
L'autospazio per l'autovalore $\lambda = -2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 0$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Parte comune

Esercizio 4. Si consideri la conica γ di equazione

$$11x^2 + 10\sqrt{3}\,xy + y^2 - 32\sqrt{3}\,x - 32y + 48 = 0 \ .$$

a) Si determinino le coordinate (x_C, y_C) del centro (se esiste) e la forma canonica di γ.

Eliminiamo il termine $10\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizziamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 16$ e $\lambda_2 = -4$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 16\sqrt{3}(\sqrt{3}\,x' - y') - 16(x' + \sqrt{3}\,y') + 48 = 0,$$

ossia

$$(x')^2 - \frac{(y')^2}{4} - 4x' + 3 = 0.$$

Quest'ultima si può riscrivere come

$$(x' - 2)^2 - \frac{(y')^2}{4} = 1,$$

cosicché la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $(x'')^2 - (y'')^2/-4 = 1$. Si tratta pertanto di un'iperbole, il cui centro ha coordinate $x'_C = 2$, $y'_C = 0$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = \sqrt{3}$, $y_C = 1$.

Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16\sqrt{3} \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si scriva la trasformazione di coordinate che porta γ in forma canonica.

Il cambiamento di coordinate che porta γ dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova pertanto

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}[\sqrt{3}\,(x'' + 2) - y''] = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'' - y'') + \sqrt{3} \\ y = \frac{1}{2}[(x'' + 2) + \sqrt{3}\,y''] = \frac{1}{2}(x'' + \sqrt{3}\,y'') + 1 \end{cases}$$