Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
22 giugno 2012 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di

$$z = \frac{10+11i}{4+i}$$

Risulta $z = 3+2i$ quindi la sua parte reale è 3 e la sua parte immaginaria 2.

b) Rappresentare graficamente nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-3-2i| < 3, \arg(z-3-2i) \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]\}$$

Si tratta di una parte della corona circolare di centro $3+2i$ e raggi compresi tra 2 e 3 (bordi esclusi), per gli angoli compresi tra l'orizzontale (verso destra) e un sesto di circonferenza (bordi inclusi, tranne le estremità).

Esercizio 2. Si considerino i sottoinsiemi

$$S_k = \{(k+s, 3t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\}$$

di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,2,0), \qquad \underline{v}_2 = (0,3,0,1), \qquad \underline{v}_3 = (0,-1,3,0).$$

Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) S_k è un sottospazio se e solo se $k=0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esistono $s,t,u \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} k+s=0 \\ 3t-u=0 \\ 2s+3u=0 \\ t=0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$. Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(s, 3t - u, 2s + 3u, t) \mid s, t, u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1, 0, 2, 0) + t(0, 3, 0, 1) + u(0, -1, 3, 0) \mid s, t, u \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, 2, 0), (0, 3, 0, 1), (0, -1, 3, 0) \rangle \\ &= \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

La matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la penultima colonna è diverso da zero. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti.

c) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ formano una base del sottospazio S_0.

Bisogna anzitutto osservare che i tre vettori appartengono ad S_0. Ma nel punto a) abbiamo osservato che essi *generano* S_0. Nel punto b) abbiamo inoltre dimostrato che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Possiamo pertanto concludere che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_0.

Esercizio 3. Nel seguente sistema, x, y, z e t sono le incognite e a un parametro reale.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 3t = 2 \\ 2x + ay + z - 2t = 0 \\ 5x + 8y - 5z + 7t = 5 \end{cases}$$

Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema al variare del parametro a.

Osserviamo innanzittutto che nella prima equazione il coefficiente di x è 1 e quindi è verosimilmente conveniente usare la tecnica di Gauss per eliminare la x delle due altre equazioni. Nella soluzione saranno indicati i passi intermedi sia per la versione originale del sistema che quelli per la versione semplificata (con un indice s per le matrici).
La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & a & 1 & -2 \\ 5 & 8 & -5 & 7 \end{pmatrix} \text{ o } A_s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & a-6 & 5 & -8 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ o } \underline{v}_s = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la versione semplificata con il metodo di Gauss ci dà le indicazioni sulla caratteristica della matrice dei coefficienti: i coefficienti delle 2 ultime equazioni sono praticamente uguali.
Il numero di incognite è 4.
Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti. In tutti i casi la caratteristica è almeno 1 perché un coefficiente di A (o A_s) è non nullo. Inoltre la caratteristica è almeno 2 perché la terza equazione non è proporzionale alla prima. Operativamente, il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna e prima e terza riga è 5. Il determinante della sottomatrice dei coefficienti costituita dalla prima, terza e quarta colonna è 0 quindi non possiamo concludere. Il determinante costituito dalla prima, seconda e terza colonna è $5a+5$. Se tale determinante è diverso da 0, cioè se $a \neq -1$, la caratteristica di A (o A_s) è 3. Se invece è uguale a 0, cioè se $a = -1$, segue dal teorema di Kronecker che la caratterisitica di A (o A_s) è 2.
Se $a \neq -1$ la caratteristica della matrice completa è per forza 3. Se invece $a = -1$, dal teorema di Kronecker, la caratteristica della matrice completa sarà 2 se e solo se il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna di A e il vettore $\underline{v}$ (o la prima e la terza colonna di A_s e il vettore $\underline{v}_s$) è uguale a 0. Tale determinante è $7 \neq 0$ quindi la matrice completa ha caratteristica 3.
In conclusione grazie al teorema di Rouché–Capelli possiamo concludere.

- Se $a \neq -1$ la matrice dei coefficienti (e quindi la matrice completa) hanno caratteristica 3, il sistema è indeterminato con soluzione che dipende da $4-3=1$ parametro (una retta di soluzioni).
- Se $a = -1$ la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2 ma la matrice completa ha caratteristica 3 il sistema è quindi impossibile.

Osserviamo che usando il metodo di Gauss il calcolo delle caratteristiche era molto più veloce perché le due ultime equazioni risultavano quasi identiche.

Esercizio 4. Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -3 \\ 8 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Non ci sono particolari problemi. Il polinomio caratteristico di A è il polinomio

$$P_A(X) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

di cui le radici sono 1 (doppia) e 2.
L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 1$ è generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
22 giugno 2012 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di

$$z = \frac{7+23i}{3+5i}$$

Risulta $z = 4 + i$ quindi la sua parte reale è 4 e la sua parte immaginaria 1.

b) Rappresentare graficamente nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-4-i| < 3, \arg(z-4-i) \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]\}$$

Si tratta di una parte della corona circolare di centro $4+i$ e raggi compresi tra 2 e 3 (bordi esclusi), per gli angoli compresi tra l'orizzontale (verso destra) e un sesto di circonferenza (bordi inclusi, tranne le estremità).

Esercizio 2. Si considerino i sottoinsiemi

$$S_k = \{(k+s, t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\}$$

di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,2,0), \qquad \underline{v}_2 = (0,1,0,1), \qquad \underline{v}_3 = (0,-1,3,0).$$

Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) S_k è un sottospazio se e solo se $k = 0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esistono $s,t,u \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} k+s=0 \\ t-u=0 \\ 2s+3u=0 \\ t=0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$. Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(s, t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,0,2,0) + t(0,1,0,1) + u(0,-1,3,0) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,2,0), (0,1,0,1), (0,-1,3,0) \rangle \\ &= \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

La matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la penultima colonna è diverso da zero. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti.

c) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ formano una base del sottospazio S_0.

Bisogna anzitutto osservare che i tre vettori appartengono ad S_0. Ma nel punto a) abbiamo osservato che essi *generano* S_0. Nel punto b) abbiamo inoltre dimostrato che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Possiamo pertanto concludere che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_0.

Esercizio 3. Nel seguente sistema, x, y, z e t sono le incognite e a un parametro reale.

$$\begin{cases} x + y - 2z - 2t = 0 \\ x + ay - 3z - 2t = -1 \\ x + 3y - z - 2t = 2 \end{cases}$$

Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema al variare del parametro a.

Osserviamo innanzittutto che nella prima equazione il coefficiente di x è 1 e quindi è verosimilmente conveniente usare la tecnica di Gauss per eliminare la x delle due altre equazioni. Nella soluzione saranno indicati i passi intermedi sia per la versione originale del sistema che quelli per la versione semplificata (con un indice s per le matrici).
La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ o } A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ o } \underline{v}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la versione semplificata con il metodo di Gauss ci dà le indicazioni sulla caratteristica della matrice dei coefficienti: i coefficienti delle 2 ultime equazioni sono praticamente uguali.
Il numero di incognite è 4.
Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti. In tutti i casi la caratteristica è almeno 1 perché un coefficiente di A (o A_s) è non nullo. Inoltre la caratteristica è almeno 2 perché la terza equazione non è proporzionale alla prima. Operativamente, il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna e prima e terza riga è 1. Il determinante della sottomatrice dei coefficienti costituita dalla prima, terza e quarta colonna è 0 quindi non possiamo concludere. Il determinante costituito dalla prima, seconda e terza colonna è $a + 1$. Se tale determinante è diverso da 0, cioè se $a \neq -1$, la caratteristica di A (o A_s) è 3. Se invece è uguale a 0, cioè se $a = -1$, segue dal teorema di Kronecker che la caratterisitica di A (o A_s) è 2.
Se $a \neq -1$ la caratteristica della matrice completa è per forza 3. Se invece $a = -1$, dal teorema di Kronecker, la caratteristica della matrice completa sarà 2 se e solo se il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna di A e il vettore $\underline{v}$ (o la prima e la terza colonna di A_s e il vettore $\underline{v}_s$) è uguale a 0. Tale determinante è $-2 \neq 0$ quindi la matrice completa ha caratteristica 3.
In conclusione grazie al teorema di Rouché–Capelli possiamo concludere.

- Se $a \neq -1$ la matrice dei coefficienti (e quindi la matrice completa) hanno caratteristica 3, il sistema è indeterminato con soluzione che dipende da $4 - 3 = 1$ parametro (una retta di soluzioni).

- Se $a = -1$ la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2 ma la matrice completa ha caratteristica 3 il sistema è quindi impossibile.

Osserviamo che usando il metodo di Gauss il calcolo delle caratteristiche era molto più veloce perché le due ultime equazioni risultavano quasi identiche.

Esercizio 4. Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ -44 & -22 & -12 \\ 24 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

Non ci sono particolari problemi. Il polinomio caratteristico di A è il polinomio

$$P_A(X) = x^3 - 4x$$

di cui le radici sono 0, -2 e 2 (senza ordine particolare).
L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 0$ è generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = -2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
22 giugno 2012 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di

$$z = \frac{26i}{6+4i}$$

Risulta $z = 2+3i$ quindi la sua parte reale è 2 e la sua parte immaginaria 3.

b) Rappresentare graficamente nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-2-3i| < 3, \arg(z-2-3i) \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]\}$$

Si tratta di una parte della corona circolare di centro $2+3i$ e raggi compresi tra 2 e 3 (bordi esclusi), per gli angoli compresi tra l'orizzontale (verso destra) e un sesto di circonferenza (bordi inclusi, tranne le estremità).

Esercizio 2. Si considerino i sottoinsiemi

$$S_k = \{(k+s, 4t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\}$$

di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,2,0), \qquad \underline{v}_2 = (0,4,0,1), \qquad \underline{v}_3 = (0,-1,3,0).$$

Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) S_k è un sottospazio se e solo se $k=0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esistono $s,t,u \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} k+s=0 \\ 4t-u=0 \\ 2s+3u=0 \\ t=0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$. Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(s, 4t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,0,2,0) + t(0,4,0,1) + u(0,-1,3,0) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,2,0), (0,4,0,1), (0,-1,3,0) \rangle \\ &= \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle . \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

La matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la penultima colonna è diverso da zero. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti.

c) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ formano una base del sottospazio S_0.

Bisogna anzitutto osservare che i tre vettori appartengono ad S_0. Ma nel punto a) abbiamo osservato che essi *generano* S_0. Nel punto b) abbiamo inoltre dimostrato che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Possiamo pertanto concludere che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_0.

Esercizio 3. Nel seguente sistema, x, y, z e t sono le incognite e a un parametro reale.

$$\begin{cases} x+3y-z-t = 3 \\ 3x+ay-2z-t = 1 \\ 5x-9y-3z-t = -3 \end{cases}$$

Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema al variare del parametro a.

Osserviamo innanzittutto che nella prima equazione il coefficiente di x è 1 e quindi è verosimilmente conveniente usare la tecnica di Gauss per eliminare la x delle due altre equazioni. Nella soluzione saranno indicati i passi intermedi sia per la versione originale del sistema che quelli per la versione semplificata (con un indice s per le matrici).
La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & a & -2 & -1 \\ 5 & -9 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ o } A_s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & a-9 & 1 & 2 \\ 0 & -24 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ o } \underline{v}_s = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la versione semplificata con il metodo di Gauss ci dà le indicazioni sulla caratteristica della matrice dei coefficienti: i coefficienti delle 2 ultime equazioni sono praticamente uguali.
Il numero di incognite è 4.
Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti. In tutti i casi la caratteristica è almeno 1 perché un coefficiente di A (o A_s) è non nullo. Inoltre la caratteristica è almeno 2 perché la terza equazione non è proporzionale alla prima. Operativamente, il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna e prima e terza riga è 2. Il determinante della sottomatrice dei coefficienti costituita dalla prima, terza e quarta colonna è 0 quindi non possiamo concludere. Il determinante costituito dalla prima, seconda e terza colonna è $2a + 6$. Se tale determinante è diverso da 0, cioè se $a \neq -3$, la caratteristica di A (o A_s) è 3. Se invece è uguale a 0, cioè se $a = -3$, segue dal teorema di Kronecker che la caratterisitica di A (o A_s) è 2.
Se $a \neq -3$ la caratteristica della matrice completa è per forza 3. Se invece $a = -3$, dal teorema di Kronecker, la caratteristica della matrice completa sarà 2 se e solo se il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna di A e il vettore $\underline{v}$ (o la prima e la terza colonna di A_s e il vettore $\underline{v}_s$) è uguale a 0. Tale determinante è $24 \neq 0$ quindi la matrice completa ha caratteristica 3.
In conclusione grazie al teorema di Rouché–Capelli possiamo concludere.

- Se $a \neq -3$ la matrice dei coefficienti (e quindi la matrice completa) hanno caratteristica 3, il sistema è indeterminato con soluzione che dipende da $4 - 3 = 1$ parametro (una retta di soluzioni).
- Se $a = -3$ la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2 ma la matrice completa ha caratteristica 3 il sistema è quindi impossibile.

Osserviamo che usando il metodo di Gauss il calcolo delle caratteristiche era molto più veloce perché le due ultime equazioni risultavano quasi identiche.

Esercizio 4. Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -31 & -15 & -9 \\ 82 & 40 & 26 \\ -24 & -12 & -10 \end{pmatrix}$$

Non ci sono particolari problemi. Il polinomio caratteristico di A è il polinomio

$$P_A(X) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

di cui le radici sono -1, 2 e -2 (senza ordine particolare).
L'autospazio per l'autovalore $\lambda = -1$ è generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = -2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
22 giugno 2012 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di

$$z = \frac{-1+17i}{5+2i}$$

Risulta $z = 1+3i$ quindi la sua parte reale è 1 e la sua parte immaginaria 3.

b) Rappresentare graficamente nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-1-3i| < 3, \arg(z-1-3i) \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]\}$$

Si tratta di una parte della corona circolare di centro $1+3i$ e raggi compresi tra 2 e 3 (bordi esclusi), per gli angoli compresi tra l'orizzontale (verso destra) e un sesto di circonferenza (bordi inclusi, tranne le estremità).

Esercizio 2. Si considerino i sottoinsiemi

$$S_k = \{(k+s, 2t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\}$$

di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,2,0), \qquad \underline{v}_2 = (0,2,0,1), \qquad \underline{v}_3 = (0,-1,3,0).$$

Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) S_k è un sottospazio se e solo se $k = 0$.

Il vettore nullo appartiene ad S_k se e solo se esistono $s,t,u \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} k+s=0 \\ 2t-u=0 \\ 2s+3u=0 \\ t=0 \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema ha soluzioni se e solo se $k = 0$. Ciò dimostra che per $k \neq 0$ il sottoinsieme S_k non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Rimane da dimostrare che S_0 è un sottospazio, il che si può fare agevolmente osservando che

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(s, 2t-u, 2s+3u, t) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,0,2,0) + t(0,2,0,1) + u(0,-1,3,0) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,2,0), (0,2,0,1), (0,-1,3,0) \rangle \\ &= \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_0 risulta essere il sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, il che dimostra che S_0 è un sottospazio.

b) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

La matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la penultima colonna è diverso da zero. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti.

c) I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ formano una base del sottospazio S_0.

Bisogna anzitutto osservare che i tre vettori appartengono ad S_0. Ma nel punto a) abbiamo osservato che essi *generano* S_0. Nel punto b) abbiamo inoltre dimostrato che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Possiamo pertanto concludere che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_0.

Esercizio 3. Nel seguente sistema, x, y, z e t sono le incognite e a un parametro reale.

$$\begin{cases} x \quad +3z \ +t = -2 \\ 2x + ay - 3z \quad = -1 \\ 4x \ -y + 3z + 2t = -6 \end{cases}$$

Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema al variare del parametro a.

Osserviamo innanzittutto che nella prima equazione il coefficiente di x è 1 e quindi è verosimilmente conveniente usare la tecnica di Gauss per eliminare la x delle due altre equazioni. Nella soluzione saranno indicati i passi intermedi sia per la versione originale del sistema che quelli per la versione semplificata (con un indice s per le matrici).
La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & a & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ o } A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & a & -9 & -2 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ o } \underline{v}_s = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la versione semplificata con il metodo di Gauss ci dà le indicazioni sulla caratteristica della matrice dei coefficienti: i coefficienti delle 2 ultime equazioni sono praticamente uguali.
Il numero di incognite è 4.
Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti. In tutti i casi la caratteristica è almeno 1 perché un coefficiente di A (o A_s) è non nullo. Inoltre la caratteristica è almeno 2 perché la terza equazione non è proporzionale alla prima. Operativamente, il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna e prima e terza riga è -9. Il determinante della sottomatrice dei coefficienti costituita dalla prima, terza e quarta colonna è 0 quindi non possiamo concludere. Il determinante costituito dalla prima, seconda e terza colonna è $-9a - 9$. Se tale determinante è diverso da 0, cioè se $a \neq -1$, la caratteristica di A (o A_s) è 3. Se invece è uguale a 0, cioè se $a = -1$, segue dal teorema di Kronecker che la caratterisitica di A (o A_s) è 2.
Se $a \neq -1$ la caratteristica della matrice completa è per forza 3. Se invece $a = -1$, dal teorema di Kronecker, la caratteristica della matrice completa sarà 2 se e solo se il determinante della sottomatrice costituita dalla prima e terza colonna di A e il vettore $\underline{v}$ (o la prima e la terza colonna di A_s e il vettore $\underline{v}_s$) è uguale a 0. Tale determinante è $1 \neq 0$ quindi la matrice completa ha caratteristica 3.
In conclusione grazie al teorema di Rouché–Capelli possiamo concludere.

- Se $a \neq -1$ la matrice dei coefficienti (e quindi la matrice completa) hanno caratteristica 3, il sistema è indeterminato con soluzione che dipende da $4 - 3 = 1$ parametro (una retta di soluzioni).
- Se $a = -1$ la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2 ma la matrice completa ha caratteristica 3 il sistema è quindi impossibile.

Osserviamo che usando il metodo di Gauss il calcolo delle caratteristiche era molto più veloce perché le due ultime equazioni risultavano quasi identiche.

Esercizio 4. Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -50 & -24 & -20 \\ 92 & 44 & 36 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Non ci sono particolari problemi. Il polinomio caratteristico di A è il polinomio

$$P_A(X) = x^3 - 4x$$

di cui le radici sono -2, 0 e 2 (senza ordine particolare).
L'autospazio per l'autovalore $\lambda = -2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 0$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio per l'autovalore $\lambda = 2$ è generato da

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$