Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
13 aprile 2012 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(0;2;-3)$, $B(-4;9;-3)$ e il piano π di equazione

$$x - 2y + z + 14 = 0.$$

a) Si determini la retta r passante per A ed ortogonale al piano π.

Come vettore direzionale della retta r si può scegliere il vettore $\underline{n} = (1;-2;1)$ ortogonale a π. Pertanto le equazioni parametriche di r sono

$$r: \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

b) Si scriva l'equazione del piano π' passante per B e parallelo a π.

L'equazione di π' è $1\,(x-(-4)) - 2\,(y-9) + 1\,(z-(-3)) = 0$, ossia $x - 2y + z + 25 = 0$.

c) Si determini il punto C d'intersezione tra r e π'.

Tale punto ovviamente esiste, poiché r è ortogonale a π'. Per trovarne le coordinate basta inserire le equazioni parametriche di r nell'equazione di π'. Si trova $t = -3$ e quindi $C(-3;8;-6)$.

d) Si dimostri che il triangolo ABC è rettangolo e se ne calcoli l'area.

Con un semplice disegno è facile ricordare che i punti A e C si trovano sulla retta r, mentre B e C si trovano sul piano π'. Poiché r e π' sono ortogonali, lo sono anche i vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ (cosa che si può agevolmente verificare mostrando che $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$). Quindi il triangolo è rettangolo in C. La sua area si può calcolare come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|$ oppure come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\|$. In entrambi i casi si ottiene $\frac{3\sqrt{66}}{2}$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$:

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 + 4x_4 - x_5 = 2\}$$
$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid {x_1}^2 + x_3 + x_5 = 0\}$$
$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0,\ x_3 - x_5 = 0\}$$

a) Si dimostri che solo uno dei tre sottoinsiemi è un sottospazio.

Il sottoinsieme S_1 non può essere un sottospazio in quanto $(0,0,0,0,0) \notin S_1$.
Il sottoinsieme S_2 contiene $(0,0,0,0,0)$, ma la presenza di ${x_1}^2$ nell'equazione che lo definisce deve destare più di un sospetto. È facile per esempio vedere che S_2 non è chiuso rispetto al prodotto esterno (ossia, rispetto al prodotto per uno scalare). Infatti, abbiamo che $(1,0,0,0,-1) \in S_2$, mentre

$$2(1,0,0,0,-1) = (2,0,0,0,-2) \notin S_2.$$

Pertanto neanche S_2 è un sottospazio.
Per mostrare che S_3 è un sottospazio si può ovviamente far vedere che, grazie alle equazioni che definiscono S_3, sono soddisfatte le proprietà:

- $(0,0,0,0,0) \in S_3$;
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$ e $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in S_3$ implicano che
$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \in S_3;$$
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ implicano che $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5) \in S_3$.

Ci limitiamo qui a dimostrare in dettaglio l'ultimo punto:

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5) \in S_3 \iff \begin{cases} (\lambda x_1) + 2(\lambda x_2) + 4(\lambda x_4) = 0 \\ (\lambda x_3) - (\lambda x_5) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda(x_1 + 2x_2 + 4x_4) = 0 \\ \lambda(x_3 - x_5) = 0 \end{cases}$$

il che è vero per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ in quanto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$.
Per dimostrare in una maniera alternativa che S_3 è un sottospazio, si possono ricavare x_1 e x_3 dalle equazioni, cosicché

$$\begin{aligned} S_3 &= \{(-2x_2 - 4x_4, x_2, x_5, x_4, x_5) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2(-2,1,0,0,0) + x_4(-4,0,0,1,0) + x_5(0,0,1,0,1) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(-2,1,0,0,0), (-4,0,0,1,0), (0,0,1,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_3 risulta essere il sottospazio generato da

$$\underline{v}_1 = (-2,1,0,0,0), \quad \underline{v}_2 = (-4,0,0,1,0), \quad \underline{v}_3 = (0,0,1,0,1).$$

Ciò dimostra che S_3 è un sottospazio.

b) Si determinino una base e la dimensione del sottospazio individuato nel punto precedente.

Abbiamo visto che $\underline{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$, $\underline{v}_2 = (-4, 0, 0, 1, 0)$ e $\underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0, 1)$ generano S_3. Essi sono linearmente indipendenti, poiché la matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la prima e l'ultima colonna è diverso da zero. In conclusione, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_3 e quindi $\dim S_3 = 3$.

Esercizio 3. a) Determinare al variare del parametro k l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ x - (k+5)y + 5z = 0 \\ -3x + y + (k-5)z = -8 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 3 equazioni a 3 incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -(k+5) & 5 \\ -3 & 1 & k-5 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti è

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha caratteristica massima uguale a 3, è almeno 1 perché il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0 ed è almeno 2 perché la sottomatrice costituita dalla prima e terza riga e dalle prima e seconda colonna ha determinante $5 \neq 0$. Per sapere se la caratteristica è 2 o 3 ci basta calcolare il determinante di A. Tale determinante è

$$\det A = -2k^2 - 10k - 12 = -2(k+2)(k+3)$$

Quindi la caratteristica di A è 2 per $k = -2$ o $k = -3$ e 3 negli altri casi.

Nei casi in cui la caratteristica di A è 3 siamo nel caso del teorema di Cramer, il sistema ammette un'unica soluzione.

Nei due casi in cui la caratteristica di A è 2 ci basta calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -(k+5) & 0 \\ -3 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Nel caso $k = -2$ questo determinante è uguale a 0 e quindi la caratteristica della matrice completa è 2, il sistema ammette un insieme di soluzioni di dimensione $3 - 2 = 1$, cioè una retta di soluzioni.

Nel caso $k = -3$ questo determinante è uguale a $5 \neq 0$ quindi il sistema non ammette soluzioni.

b) Risolvere il sistema nel caso $k = -2$.

Il sistema ha caratteristica 2, le soluzioni dipendono quindi da un parametro.

Dalla scelta di sottomatrice di A che abbiamo fatto per trovare la caratteristica, sappiamo che possiamo (e fino a prova contraria **dobbiamo**) scegliere la prima e la terza equazione ed usare z come parametro, cioè esprimere x e y in funzione di z. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = -3z + 7 \\ -3x + y = 7z - 8 \end{cases}$$

La risoluzione del sistema non presenta nessuna difficoltà.

Esercizio 4. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare se i vettori sono linearmente indipendenti.

I vettori sono effettivamente linearmente indipendenti. Un primo modo di procedere è di calcolare le soluzioni del sistema risultante dall'equazione

$$x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 = \underline{0}$$

ovvero

$$\begin{cases} -2x - 3y + 3z = 0 \\ -x \qquad\quad - z = 0 \\ -2x - 2y \ - z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

Il sistema non presenta nessuna particolare difficoltà. La soluzione è unica ed è $x = y = z = 0$, cioè i vettori sono linearmente indipendenti.

Il secondo modo è di determinare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Di nuovo non c'è nessuna difficoltà particolare. La caratteristica di A è al massimo 3 perché A ha 3 colonne. Usando il metodo di Kronecker si poteva vedere subito che il primo coefficiente è diverso da 0, quindi $\operatorname{car} A \geqslant 1$; che il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra[1] è $-3 \neq 0$ e quindi $\operatorname{car} A \geqslant 2$. Ci sono due orlanti a questa sottomatrice, ma la sottomatrice 3×3 in alto a sinistra[2] ha determinante $7 \neq 0$ per cui $\operatorname{car} A \geqslant 3$. In conclusione $\operatorname{car} A = 3$ e quindi le 3 colonne sono linearmente indipendenti.

b) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $\underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Siccome $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, $\underline{w}$ sarà combinazione degli stessi se e solo se i quattro vettori sono linearmente dipendenti. Questo è equivalente al fatto che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & k \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & k \end{pmatrix}.$$

abbia determinante uguale a 0. Il determinante di questa matrice si trova essere uguale a $69k - 13$ per cui i vettori sono linearmente dipendenti se e solo se $k = \frac{13}{69}$. Per calcolare il determinante di B è consigliabile sottrare la seconda riga alla quarta (o la quarta alla seconda) per far scomparire uno dei due k.

[1] non è detto che sia la sottomoatrice più furba da considerare

[2] non è detto neanche questa volta che sia la sottomatrice più furba da considerare

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
13 aprile 2012 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(0;2;-3)$, $B(-4;3;-3)$ e il piano π di equazione

$$x - 2y + z + 14 = 0.$$

a) Si determini la retta r passante per A ed ortogonale al piano π.

Come vettore direzionale della retta r si può scegliere il vettore $\underline{n} = (1;-2;1)$ ortogonale a π. Pertanto le equazioni parametriche di r sono

$$r: \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

b) Si scriva l'equazione del piano π' passante per B e parallelo a π.

L'equazione di π' è $1\,(x-(-4)) - 2\,(y-3) + 1\,(z-(-3)) = 0$, ossia $x - 2y + z + 13 = 0$.

c) Si determini il punto C d'intersezione tra r e π'.

Tale punto ovviamente esiste, poiché r è ortogonale a π'. Per trovarne le coordinate basta inserire le equazioni parametriche di r nell'equazione di π'. Si trova $t = -1$ e quindi $C(-1;4;-4)$.

d) Si dimostri che il triangolo ABC è rettangolo e se ne calcoli l'area.

Con un semplice disegno è facile ricordare che i punti A e C si trovano sulla retta r, mentre B e C si trovano sul piano π'. Poiché r e π' sono ortogonali, lo sono anche i vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ (cosa che si può agevolmente verificare mostrando che $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$). Quindi il triangolo è rettangolo in C. La sua area si può calcolare come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|$ oppure come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\|$. In entrambi i casi si ottiene $\frac{\sqrt{66}}{2}$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$:

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 2\}$$
$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid {x_1}^2 + x_3 + x_5 = 0\}$$
$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 + x_4 = 0,\ x_3 - x_5 = 0\}$$

a) Si dimostri che solo uno dei tre sottoinsiemi è un sottospazio.

Il sottoinsieme S_1 non può essere un sottospazio in quanto $(0,0,0,0,0) \notin S_1$.
Il sottoinsieme S_2 contiene $(0,0,0,0,0)$, ma la presenza di ${x_1}^2$ nell'equazione che lo definisce deve destare più di un sospetto. È facile per esempio vedere che S_2 non è chiuso rispetto al prodotto esterno (ossia, rispetto al prodotto per uno scalare). Infatti, abbiamo che $(1,0,0,0,-1) \in S_2$, mentre

$$2(1,0,0,0,-1) = (2,0,0,0,-2) \notin S_2.$$

Pertanto neanche S_2 è un sottospazio.
Per mostrare che S_3 è un sottospazio si può ovviamente far vedere che, grazie alle equazioni che definiscono S_3, sono soddisfatte le proprietà:

- $(0,0,0,0,0) \in S_3$;
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$ e $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in S_3$ implicano che
$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \in S_3;$$
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ implicano che $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5) \in S_3$.

Ci limitiamo qui a dimostrare in dettaglio l'ultimo punto:

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5) \in S_3 \iff \begin{cases} (\lambda x_1) + 2(\lambda x_2) + (\lambda x_4) = 0 \\ (\lambda x_3) - (\lambda x_5) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda(x_1 + 2x_2 + x_4) = 0 \\ \lambda(x_3 - x_5) = 0 \end{cases}$$

il che è vero per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ in quanto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$.
Per dimostrare in una maniera alternativa che S_3 è un sottospazio, si possono ricavare x_1 e x_3 dalle equazioni, cosicché

$$\begin{aligned} S_3 &= \{(-2x_2 - x_4, x_2, x_5, x_4, x_5) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2(-2,1,0,0,0) + x_4(-1,0,0,1,0) + x_5(0,0,1,0,1) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2,1,0,0,0), (-1,0,0,1,0), (0,0,1,0,1) \rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_3 risulta essere il sottospazio generato da

$$\underline{v}_1 = (-2,1,0,0,0), \quad \underline{v}_2 = (-1,0,0,1,0), \quad \underline{v}_3 = (0,0,1,0,1).$$

Ciò dimostra che S_3 è un sottospazio.

b) Si determinino una base e la dimensione del sottospazio individuato nel punto precedente.

Abbiamo visto che $\underline{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$, $\underline{v}_2 = (-1, 0, 0, 1, 0)$ e $\underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0, 1)$ generano S_3. Essi sono linearmente indipendenti, poiché la matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la prima e l'ultima colonna è diverso da zero. In conclusione, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_3 e quindi $\dim S_3 = 3$.

Esercizio 3. a) Determinare al variare del parametro k l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 3x - (k-7)y - z = 4 \\ 3x + y + (k-7)z = 4 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 3 equazioni a 3 incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -(k-7) & -1 \\ 3 & 1 & k-7 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti è

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha caratteristica massima uguale a 3, è almeno 1 perché il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0 ed è almeno 2 perché la sottomatrice costituita dalla prima e terza riga e dalle prima e seconda colonna ha determinante $-5 \neq 0$. Per sapere se la caratteristica è 2 o 3 ci basta calcolare il determinante di A. Tale determinante è

$$\det A = -k^2 - k + 42 = -(k-6)(k+7)$$

Quindi la caratteristica di A è 2 per $k = 6$ o $k = -7$ e 3 negli altri casi.

Nei casi in cui la caratteristica di A è 3 siamo nel caso del teorema di Cramer, il sistema ammette un'unica soluzione.

Nei due casi in cui la caratteristica di A è 2 ci basta calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -(k-7) & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Nel caso $k = 6$ questo determinante è uguale a 0 e quindi la caratteristica della matrice completa è 2, il sistema ammette un insieme di soluzioni di dimensione $3 - 2 = 1$, cioè una retta di soluzioni.

Nel caso $k = -7$ questo determinante è uguale a $-26 \neq 0$ quindi il sistema non ammette soluzioni.

b) Risolvere il sistema nel caso $k = 6$.

Il sistema ha caratteristica 2, le soluzioni dipendono quindi da un parametro.

Dalla scelta di sottomatrice di A che abbiamo fatto per trovare la caratteristica, sappiamo che possiamo (e fino a prova contraria **dobbiamo**) scegliere la prima e la terza equazione ed usare z come parametro, cioè esprimere x e y in funzione di z. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3z + 2 \\ 3x + y = z + 4 \end{cases}$$

La risoluzione del sistema non presenta nessuna difficoltà.

Esercizio 4. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare se i vettori sono linearmente indipendenti.

I vettori sono effettivamente linearmente indipendenti. Un primo modo di procedere è di calcolare le soluzioni del sistema risultante dall'equazione

$$x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 = \underline{0}$$

ovvero

$$\begin{cases} x + 6z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Il sistema non presenta nessuna particolare difficoltà. La soluzione è unica ed è $x = y = z = 0$, cioè i vettori sono linearmente indipendenti.

Il secondo modo è di determinare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Di nuovo non c'è nessuna difficoltà particolare. La caratteristica di A è al massimo 3 perché A ha 3 colonne. Usando il metodo di Kronecker si poteva vedere subito che il primo coefficiente è diverso da 0, quindi $\operatorname{car} A \geqslant 1$; che il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra[1] è $3 \neq 0$ e quindi $\operatorname{car} A \geqslant 2$. Ci sono due orlanti a questa sottomatrice, ma la sottomatrice 3×3 in alto a sinistra[2] ha determinante $-2 \neq 0$ per cui $\operatorname{car} A \geqslant 3$. In conclusione $\operatorname{car} A = 3$ e quindi le 3 colonne sono linearmente indipendenti.

b) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Siccome $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, $\underline{w}$ sarà combinazione degli stessi se e solo se i quattro vettori sono linearmente dipendenti. Questo è equivalente al fatto che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & k \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & k \end{pmatrix} .$$

abbia determinante uguale a 0. Il determinante di questa matrice si trova essere uguale a $-39k+275$ per cui i vettori sono linearmente dipendenti se e solo se $k = \frac{275}{39}$. Per calcolare il determinante di B è consigliabile sottrare la seconda riga alla quarta (o la quarta alla seconda) per far scomparire uno dei due k.

[1] non è detto che sia la sottomoatrice più furba da considerare

[2] non è detto neanche questa volta che sia la sottomatrice più furba da considerare

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
13 aprile 2012 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(0;2;-3)$, $B(-4;-3;-3)$ e il piano π di equazione

$$x - 2y + z + 14 = 0.$$

a) Si determini la retta r passante per A ed ortogonale al piano π.

Come vettore direzionale della retta r si può scegliere il vettore $\underline{n} = (1;-2;1)$ ortogonale a π. Pertanto le equazioni parametriche di r sono

$$r: \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

b) Si scriva l'equazione del piano π' passante per B e parallelo a π.

L'equazione di π' è $1\,(x-(-4)) - 2\,(y-(-3)) + 1\,(z-(-3)) = 0$, ossia $x - 2y + z + 1 = 0$.

c) Si determini il punto C d'intersezione tra r e π'.

Tale punto ovviamente esiste, poiché r è ortogonale a π'. Per trovarne le coordinate basta inserire le equazioni parametriche di r nell'equazione di π'. Si trova $t = 1$ e quindi $C(1;0;-2)$.

d) Si dimostri che il triangolo ABC è rettangolo e se ne calcoli l'area.

Con un semplice disegno è facile ricordare che i punti A e C si trovano sulla retta r, mentre B e C si trovano sul piano π'. Poiché r e π' sono ortogonali, lo sono anche i vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ (cosa che si può agevolmente verificare mostrando che $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$). Quindi il triangolo è rettangolo in C. La sua area si può calcolare come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|$ oppure come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\|$. In entrambi i casi si ottiene $\frac{\sqrt{210}}{2}$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$:

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 - 2x_4 - x_5 = 2\}$$
$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid {x_1}^2 + x_3 + x_5 = 0\}$$
$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0,\ x_3 - x_5 = 0\}$$

a) Si dimostri che solo uno dei tre sottoinsiemi è un sottospazio.

Il sottoinsieme S_1 non può essere un sottospazio in quanto $(0, 0, 0, 0, 0) \notin S_1$.
Il sottoinsieme S_2 contiene $(0, 0, 0, 0, 0)$, ma la presenza di ${x_1}^2$ nell'equazione che lo definisce deve destare più di un sospetto. È facile per esempio vedere che S_2 non è chiuso rispetto al prodotto esterno (ossia, rispetto al prodotto per uno scalare). Infatti, abbiamo che $(1, 0, 0, 0, -1) \in S_2$, mentre

$$2(1, 0, 0, 0, -1) = (2, 0, 0, 0, -2) \notin S_2.$$

Pertanto neanche S_2 è un sottospazio.
Per mostrare che S_3 è un sottospazio si può ovviamente far vedere che, grazie alle equazioni che definiscono S_3, sono soddisfatte le proprietà:

- $(0, 0, 0, 0, 0) \in S_3$;
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$ e $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in S_3$ implicano che
$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \in S_3;$$
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ implicano che $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5) \in S_3$.

Ci limitiamo qui a dimostrare in dettaglio l'ultimo punto:

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5) \in S_3 \iff \begin{cases} (\lambda x_1) + 2(\lambda x_2) - 2(\lambda x_4) = 0 \\ (\lambda x_3) - (\lambda x_5) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda(x_1 + 2x_2 - 2x_4) = 0 \\ \lambda(x_3 - x_5) = 0 \end{cases}$$

il che è vero per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ in quanto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$.
Per dimostrare in una maniera alternativa che S_3 è un sottospazio, si possono ricavare x_1 e x_3 dalle equazioni, cosicché

$$\begin{aligned} S_3 &= \{(-2x_2 + 2x_4, x_2, x_5, x_4, x_5) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2(-2, 1, 0, 0, 0) + x_4(2, 0, 0, 1, 0) + x_5(0, 0, 1, 0, 1) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(-2, 1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1)\rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_3 risulta essere il sottospazio generato da

$$\underline{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0), \quad \underline{v}_2 = (2, 0, 0, 1, 0), \quad \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0, 1).$$

Ciò dimostra che S_3 è un sottospazio.

b) Si determinino una base e la dimensione del sottospazio individuato nel punto precedente.

Abbiamo visto che $\underline{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$, $\underline{v}_2 = (2, 0, 0, 1, 0)$ e $\underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0, 1)$ generano S_3. Essi sono linearmente indipendenti, poiché la matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la prima e l'ultima colonna è diverso da zero. In conclusione, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_3 e quindi $\dim S_3 = 3$.

Esercizio 3. a) Determinare al variare del parametro k l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 9 \\ 2x - (k+3)y - z = 3 \\ 2x + y + (k+3)z = 3 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 3 equazioni a 3 incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -(k+3) & -1 \\ 2 & 1 & k+3 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti è

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha caratteristica massima uguale a 3, è almeno 1 perché il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0 ed è almeno 2 perché la sottomatrice costituita dalla prima e terza riga e dalle prima e seconda colonna ha determinante $-3 \neq 0$. Per sapere se la caratteristica è 2 o 3 ci basta calcolare il determinante di A. Tale determinante è

$$\det A = -k^2 - 2k + 8 = -(k+4)(k-2)$$

Quindi la caratteristica di A è 2 per $k = -4$ o $k = 2$ e 3 negli altri casi.

Nei casi in cui la caratteristica di A è 3 siamo nel caso del teorema di Cramer, il sistema ammette un'unica soluzione.

Nei due casi in cui la caratteristica di A è 2 ci basta calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & -(k+3) & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nel caso $k = -4$ questo determinante è uguale a 0 e quindi la caratteristica della matrice completa è 2, il sistema ammette un insieme di soluzioni di dimensione $3 - 2 = 1$, cioè una retta di soluzioni.

Nel caso $k = 2$ questo determinante è uguale a $90 \neq 0$ quindi il sistema non ammette soluzioni.

b) Risolvere il sistema nel caso $k = -4$.

Il sistema ha caratteristica 2, le soluzioni dipendono quindi da un parametro.

Dalla scelta di sottomatrice di A che abbiamo fatto per trovare la caratteristica, sappiamo che possiamo (e fino a prova contraria **dobbiamo**) scegliere la prima e la terza equazione ed usare z come parametro, cioè esprimere x e y in funzione di z. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = -4z + 9 \\ 2x + y = z + 3 \end{cases}$$

La risoluzione del sistema non presenta nessuna difficoltà.

Esercizio 4. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare se i vettori sono linearmente indipendenti.

I vettori sono effettivamente linearmente indipendenti. Un primo modo di procedere è di calcolare le soluzioni del sistema risultante dall'equazione

$$x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 = \underline{0}$$

ovvero

$$\begin{cases} -x - 2y + 4z = 0 \\ y = 0 \\ -x - y = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \end{cases}$$

Il sistema non presenta nessuna particolare difficoltà. La soluzione è unica ed è $x = y = z = 0$, cioè i vettori sono linearmente indipendenti.

Il secondo modo è di determinare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Di nuovo non c'è nessuna difficoltà particolare. La caratteristica di A è al massimo 3 perché A ha 3 colonne. Usando il metodo di Kronecker si poteva vedere subito che il primo coefficiente è diverso da 0, quindi $\operatorname{car} A \geqslant 1$; che il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra[1] è $-1 \neq 0$ e quindi $\operatorname{car} A \geqslant 2$. Ci sono due orlanti a questa sottomatrice, ma la sottomatrice 3×3 in alto a sinistra[2] ha determinante $4 \neq 0$ per cui $\operatorname{car} A \geqslant 3$. In conclusione $\operatorname{car} A = 3$ e quindi le 3 colonne sono linearmente indipendenti.

b) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Siccome $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, $\underline{w}$ sarà combinazione degli stessi se e solo se i quattro vettori sono linearmente dipendenti. Questo è equivalente al fatto che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & k \end{pmatrix} .$$

abbia determinante uguale a 0. Il determinante di questa matrice si trova essere uguale a $33k + 11$ per cui i vettori sono linearmente dipendenti se e solo se $k = -\frac{1}{3}$. Per calcolare il determinante di B è consigliabile sottrare la seconda riga alla quarta (o la quarta alla seconda) per far scomparire uno dei due k.

[1] non è detto che sia la sottomoatrice più furba da considerare

[2] non è detto neanche questa volta che sia la sottomatrice più furba da considerare

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
13 aprile 2012 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(0; 2; -3)$, $B(-4; -9; -3)$ e il piano π di equazione

$$x - 2y + z + 14 = 0.$$

a) Si determini la retta r passante per A ed ortogonale al piano π.

Come vettore direzionale della retta r si può scegliere il vettore $\underline{n} = (1; -2; 1)$ ortogonale a π. Pertanto le equazioni parametriche di r sono

$$r: \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

b) Si scriva l'equazione del piano π' passante per B e parallelo a π.

L'equazione di π' è $1\,(x - (-4)) - 2\,(y - (-9)) + 1\,(z - (-3)) = 0$, ossia $x - 2y + z - 11 = 0$.

c) Si determini il punto C d'intersezione tra r e π'.

Tale punto ovviamente esiste, poiché r è ortogonale a π'. Per trovarne le coordinate basta inserire le equazioni parametriche di r nell'equazione di π'. Si trova $t = 3$ e quindi $C(3; -4; 0)$.

d) Si dimostri che il triangolo ABC è rettangolo e se ne calcoli l'area.

Con un semplice disegno è facile ricordare che i punti A e C si trovano sulla retta r, mentre B e C si trovano sul piano π'. Poiché r e π' sono ortogonali, lo sono anche i vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ (cosa che si può agevolmente verificare mostrando che $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$). Quindi il triangolo è rettangolo in C. La sua area si può calcolare come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|$ oppure come $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\|$. In entrambi i casi si ottiene $\frac{3\sqrt{498}}{2}$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$:

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 2\}$$
$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid {x_1}^2 + x_3 + x_5 = 0\}$$
$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0,\ x_3 - x_5 = 0\}$$

a) Si dimostri che solo uno dei tre sottoinsiemi è un sottospazio.

Il sottoinsieme S_1 non può essere un sottospazio in quanto $(0,0,0,0,0) \notin S_1$.
Il sottoinsieme S_2 contiene $(0,0,0,0,0)$, ma la presenza di ${x_1}^2$ nell'equazione che lo definisce deve destare più di un sospetto. È facile per esempio vedere che S_2 non è chiuso rispetto al prodotto esterno (ossia, rispetto al prodotto per uno scalare). Infatti, abbiamo che $(1,0,0,0,-1) \in S_2$, mentre

$$2(1,0,0,0,-1) = (2,0,0,0,-2) \notin S_2.$$

Pertanto neanche S_2 è un sottospazio.
Per mostrare che S_3 è un sottospazio si può ovviamente far vedere che, grazie alle equazioni che definiscono S_3, sono soddisfatte le proprietà:

- $(0,0,0,0,0) \in S_3$;
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$ e $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in S_3$ implicano che
$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \in S_3;$$
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ implicano che $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5) \in S_3$.

Ci limitiamo qui a dimostrare in dettaglio l'ultimo punto:

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5) \in S_3 \iff \begin{cases} (\lambda x_1) + 2(\lambda x_2) + 3(\lambda x_4) = 0 \\ (\lambda x_3) - (\lambda x_5) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_4) = 0 \\ \lambda(x_3 - x_5) = 0 \end{cases}$$

il che è vero per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ in quanto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_3$.
Per dimostrare in una maniera alternativa che S_3 è un sottospazio, si possono ricavare x_1 e x_3 dalle equazioni, cosicché

$$\begin{aligned} S_3 &= \{(-2x_2 - 3x_4, x_2, x_5, x_4, x_5) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2(-2,1,0,0,0) + x_4(-3,0,0,1,0) + x_5(0,0,1,0,1) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(-2,1,0,0,0), (-3,0,0,1,0), (0,0,1,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

Quindi S_3 risulta essere il sottospazio generato da

$$\underline{v}_1 = (-2,1,0,0,0), \quad \underline{v}_2 = (-3,0,0,1,0), \quad \underline{v}_3 = (0,0,1,0,1).$$

Ciò dimostra che S_3 è un sottospazio.

b) Si determinino una base e la dimensione del sottospazio individuato nel punto precedente.

Abbiamo visto che $\underline{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$, $\underline{v}_2 = (-3, 0, 0, 1, 0)$ e $\underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0, 1)$ generano S_3. Essi sono linearmente indipendenti, poiché la matrice da essi formata, ossia

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ha caratteristica 3. Infatti è immediato verificare che il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la prima e l'ultima colonna è diverso da zero. In conclusione, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di S_3 e quindi $\dim S_3 = 3$.

Esercizio 3. a) Determinare al variare del parametro k l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 8z = -11 \\ x - (k+4)y + z = 6 \\ -x - 2y + (k+5)z = -6 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 3 equazioni a 3 incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 1 & -(k+4) & 1 \\ -1 & -2 & k+5 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti è

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha caratteristica massima uguale a 3, è almeno 1 perché il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0 ed è almeno 2 perché la sottomatrice costituita dalla prima e terza riga e dalle prima e seconda colonna ha determinante $-4 \neq 0$. Per sapere se la caratteristica è 2 o 3 ci basta calcolare il determinante di A. Tale determinante è

$$\det A = -k^2 + k + 42 = -(k+6)(k-7)$$

Quindi la caratteristica di A è 2 per $k = -6$ o $k = 7$ e 3 negli altri casi.

Nei casi in cui la caratteristica di A è 3 siamo nel caso del teorema di Cramer, il sistema ammette un'unica soluzione.

Nei due casi in cui la caratteristica di A è 2 ci basta calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -11 \\ 1 & -(k+4) & 6 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Nel caso $k = -6$ questo determinante è uguale a 0 e quindi la caratteristica della matrice completa è 2, il sistema ammette un insieme di soluzioni di dimensione $3 - 2 = 1$, cioè una retta di soluzioni.

Nel caso $k = 7$ questo determinante è uguale a $221 \neq 0$ quindi il sistema non ammette soluzioni.

b) Risolvere il sistema nel caso $k = -6$.

Il sistema ha caratteristica 2, le soluzioni dipendono quindi da un parametro.

Dalla scelta di sottomatrice di A che abbiamo fatto per trovare la caratteristica, sappiamo che possiamo (e fino a prova contraria **dobbiamo**) scegliere la prima e la terza equazione ed usare z come parametro, cioè esprimere x e y in funzione di z. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 8z - 11 \\ -x - 2y = z - 6 \end{cases}$$

La risoluzione del sistema non presenta nessuna difficoltà.

Esercizio 4. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare se i vettori sono linearmente indipendenti.

I vettori sono effettivamente linearmente indipendenti. Un primo modo di procedere è di calcolare le soluzioni del sistema risultante dall'equazione

$$x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 = \underline{0}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2x + y + 7z = 0 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 6x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Il sistema non presenta nessuna particolare difficoltà. La soluzione è unica ed è $x = y = z = 0$, cioè i vettori sono linearmente indipendenti.

Il secondo modo è di determinare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Di nuovo non c'è nessuna difficoltà particolare. La caratteristica di A è al massimo 3 perché A ha 3 colonne. Usando il metodo di Kronecker si poteva vedere subito che il primo coefficiente è diverso da 0, quindi $\operatorname{car} A \geqslant 1$; che il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra[1] è $5 \neq 0$ e quindi $\operatorname{car} A \geqslant 2$. Ci sono due orlanti a questa sottomatrice, ma la sottomatrice 3×3 in alto a sinistra[2] ha determinante $-5 \neq 0$ per cui $\operatorname{car} A \geqslant 3$. In conclusione $\operatorname{car} A = 3$ e quindi le 3 colonne sono linearmente indipendenti.

b) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $\underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Siccome $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, $\underline{w}$ sarà combinazione degli stessi se e solo se i quattro vettori sono linearmente dipendenti. Questo è equivalente al fatto che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & k \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

abbia determinante uguale a 0. Il determinante di questa matrice si trova essere uguale a $-75k+515$ per cui i vettori sono linearmente dipendenti se e solo se $k = \frac{103}{15}$. Per calcolare il determinante di B è consigliabile sottrare la seconda riga alla quarta (o la quarta alla seconda) per far scomparire uno dei due k.

[1] non è detto che sia la sottomoatrice più furba da considerare

[2] non è detto neanche questa volta che sia la sottomatrice più furba da considerare