Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
16 febbraio 2012 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Dati i vettori $\underline{v}_1 = (1; 2; -1)$, $\underline{v}_2 = (2; 1; -1)$ e $\underline{v}_3 = (-1; 4; k)$, studiare, al variare di k, la dipendenza o indipendenza lineare e, nei vari casi, indicare la dimensione del sottospazio V da essi generato.

Si vede immediatamente che v_1 e v_2 non sono linearmente dipendenti perché non sono proporzionali. Quindi il sottospazio V che essi generano è di dimensione 2.

La dimensione di V può essere quindi 2 o 3 secondo che $\underline{v}_3 \in V$ o no. Per sapere se $\underline{v}_3$ sta in V ci basta calcolare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

Questa matrice può avere caratteristica 2 o 3 e ha caratteristica 2 se e soltanto se $\det A = 0$. Non è difficile verificare che $\det A = -3k - 3$ (come al solito è più furbo usare un ± 1 per fabbricare degli zeri in una riga o una colonna piuttosto che buttarsi a capofitto nel calcolo del determinante). La dimensione del sottospazio V è quindi 2 se $k = -1$ e 3 se no.

b) Determinare, al variare di k, se il vettore

$$\underline{w} = (-4; 1; 1)$$

appartiene o no al sottospazio V.

Se $k \neq -1$ è sicuro che $\underline{w} \in V$ poiché $V = \mathbb{R}^3$.

Nel caso $k = -1$ abbiamo visto che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ costituiscono una base di V. Quindi basta, di nuovo, calcolare il determinante della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il calcolo del determinante non pone nessun problema (ma si consiglia lo stesso di fabbricare degli zeri). È effettivamente uguale a 0 e quindi anche nel caso $k = -1$ abbiamo $\underline{w} \in V$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 10a - 18 \\ 3x - y + z = -4a + 2 \\ 4x - y + 2z = 8a - 12 \\ 5x - 2y + z = -6a + 4 \end{cases}$$

dipendente da un parametro reale a.

a) Per quale valore del parametro a il sistema ha soluzioni?

Possiamo applicare il teorema di Rouché-Capelli, ossia confrontare la caratteristica della matrice dei coefficienti A con quella della matrice completa B, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 10a - 18 \\ 3 & -1 & 1 & -4a + 2 \\ 4 & -1 & 2 & 8a - 12 \\ 5 & -2 & 1 & -6a + 4 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che $\operatorname{car} A = 2$. Infatti il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è diverso da zero, mentre le due sottomatrici 3×3 che la orlano (ossia, quelle che si ottengono eliminando da A la terza o la quarta riga) hanno entrambe determinante nullo.

Per calcolare $\operatorname{car} B$ basta considerare le altre due matrici 3×3 che orlano la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra, ossia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 18 \\ 3 & -1 & -4a + 2 \\ 4 & -1 & 8a - 12 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 18 \\ 3 & -1 & -4a + 2 \\ 5 & -2 & -6a + 4 \end{pmatrix}.$$

Esse hanno, rispettivamente, determinante uguale a $54(1 - a)$ e $16(1 - a)$. Pertanto $\operatorname{car} B = 2$ se $a = 1$, mentre $\operatorname{car} B = 3$ se $a \neq 1$.

Conclusione: se $a = 1$ le due caratteristiche coincidono e il sistema ha soluzioni (per la precisione, ∞^1 soluzioni); se invece $a \neq 1$ il sistema non ha soluzioni.

b) Per il valore di a individuato nel punto precedente, trovare le soluzioni del sistema.

Per $a = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = -8 \\ 3x - y + z = -2 \\ 4x - y + 2z = -4 \\ 5x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

In base a quanto visto nel punto precedente, possiamo eliminare la terza e la quarta equazione e trattare z come un parametro, ossia considerare il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = -8 - 4z \\ 3x - y = -2 - z \end{cases}$$

È facile vedere che le soluzioni sono $x = -2 - z$, $y = -4 - 2z$, con z arbitrario. Come previsto, esse sono ∞^1.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & b & -1 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro reale b.

a) Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro b.

Iniziamo con il calcolare il determinante di A. Sottraendo la terza colonna alla prima non è difficile vedere che $\det A = b - 2$. Quindi $\operatorname{car} A = 4$ se $b \neq 2$. Se invece $b = 2$, eliminando la terza riga e la terza colonna si dimostra immediatamente che $\operatorname{car} A = 3$.

b) Per quale valore di b il vettore $\underline{v} = (-1, 0, 1, 2)^T$ è un autovettore della matrice A? Quanto vale l'autovalore corrispondente?

Basta calcolare

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & b & -1 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 + b \\ -2 \end{pmatrix}$$

ed osservare che il risultato è un multiplo di $\underline{v}$ se e solo se $b = 2$. In tal caso $A\underline{v} = -\underline{v}$ e quindi l'autovalore corrispondente è -1.

c) Per il valore di b individuato nel punto precedente, trovare gli autovalori di A.

Per $b = 2$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi gli autovalori si trovano calcolando le radici del polinomio

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & -3 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Anche qui conviene sottrarre la terza colonna alla prima (e sommare alla seconda colonna λ per la terza colonna), ottenendo così

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1+\lambda & -2+2\lambda-\lambda^2 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & -3 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ -1+\lambda & -2+2\lambda-\lambda^2 & -1 \\ -2 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & \lambda-\lambda^2 & 0 \\ -1+\lambda & 2-\lambda & -1 \\ -2 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1),$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sommato la seconda riga alla prima. Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$ (semplice) e $\lambda_3 = -1$ (semplice).

d) La matrice A (sempre con il valore di b individuato al punto b)) è diagonalizzabile?

Abbiamo appena visto che la molteplicità algebrica di λ_1 è $m_1 = 2$. La molteplicità geometrica è invece $d_1 = 4 - \operatorname{car} A$. Ma abbiamo visto nel punto a) che $\operatorname{car} A = 3$ se $b = 2$. Quindi $d_1 = 4 - 3 = 1$, cosicché l'autovalore λ_1 non è regolare e la matrice A non è diagonalizzabile (per $b = 2$).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
16 febbraio 2012 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Dati i vettori $\underline{v}_1 = (3; 1; 2)$, $\underline{v}_2 = (1; -1; 1)$ e $\underline{v}_3 = (7; 5; k)$, studiare, al variare di k, la dipendenza o indipendenza lineare e, nei vari casi, indicare la dimensione del sottospazio V da essi generato.

Si vede immediatamente che v_1 e v_2 non sono linearmente dipendenti perché non sono proporzionali. Quindi il sottospazio V che essi generano è di dimensione 2.

La dimensione di V può essere quindi 2 o 3 secondo che $\underline{v}_3 \in V$ o no. Per sapere se $\underline{v}_3$ sta in V ci basta calcolare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Questa matrice può avere caratteristica 2 o 3 e ha caratteristica 2 se e soltanto se $\det A = 0$. Non è difficile verificare che $\det A = -4k + 16$ (come al solito è più furbo usare un ± 1 per fabbricare degli zeri in una riga o una colonna piuttosto che buttarsi a capofitto nel calcolo del determinante). La dimensione del sottospazio V è quindi 2 se $k = 4$ e 3 se no.

b) Determinare, al variare di k, se il vettore

$$\underline{w} = (3; 5; 1)$$

appartiene o no al sottospazio V.

Se $k \neq 4$ è sicuro che $\underline{w} \in V$ poiché $V = \mathbb{R}^3$.

Nel caso $k = 4$ abbiamo visto che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ costituiscono una base di V. Quindi basta, di nuovo, calcolare il determinante della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il calcolo del determinante non pone nessun problema (ma si consiglia lo stesso di fabbricare degli zeri). È effettivamente uguale a 0 e quindi anche nel caso $k = 4$ abbiamo $\underline{w} \in V$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 10a - 6 \\ 3x - y + z = -4a + 5 \\ 4x - y + 2z = 8a - 6 \\ 5x - 2y + z = -6a + 7 \end{cases}$$

dipendente da un parametro reale a.

a) Per quale valore del parametro a il sistema ha soluzioni?

Possiamo applicare il teorema di Rouché-Capelli, ossia confrontare la caratteristica della matrice dei coefficienti A con quella della matrice completa B, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 10a - 6 \\ 3 & -1 & 1 & -4a + 5 \\ 4 & -1 & 2 & 8a - 6 \\ 5 & -2 & 1 & -6a + 7 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che $\operatorname{car} A = 2$. Infatti il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è diverso da zero, mentre le due sottomatrici 3×3 che la orlano (ossia, quelle che si ottengono eliminando da A la terza o la quarta riga) hanno entrambe determinante nullo.

Per calcolare $\operatorname{car} B$ basta considerare le altre due matrici 3×3 che orlano la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra, ossia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 6 \\ 3 & -1 & -4a + 5 \\ 4 & -1 & 8a - 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 6 \\ 3 & -1 & -4a + 5 \\ 5 & -2 & -6a + 7 \end{pmatrix}.$$

Esse hanno, rispettivamente, determinante uguale a $54(1 - a)$ e $16(1 - a)$. Pertanto $\operatorname{car} B = 2$ se $a = 1$, mentre $\operatorname{car} B = 3$ se $a \neq 1$.

Conclusione: se $a = 1$ le due caratteristiche coincidono e il sistema ha soluzioni (per la precisione, ∞^1 soluzioni); se invece $a \neq 1$ il sistema non ha soluzioni.

b) Per il valore di a individuato nel punto precedente, trovare le soluzioni del sistema.

Per $a = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 4 \\ 3x - y + z = 1 \\ 4x - y + 2z = 2 \\ 5x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

In base a quanto visto nel punto precedente, possiamo eliminare la terza e la quarta equazione e trattare z come un parametro, ossia considerare il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 4 - 4z \\ 3x - y = 1 - z \end{cases}$$

È facile vedere che le soluzioni sono $x = 1 - z$, $y = 2 - 2z$, con z arbitrario. Come previsto, esse sono ∞^1.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & b & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro reale b.

a) Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro b.

Iniziamo con il calcolare il determinante di A. Sottraendo la terza colonna alla prima non è difficile vedere che $\det A = 2(b-2)$. Quindi $\operatorname{car} A = 4$ se $b \neq 2$. Se invece $b = 2$, eliminando la terza riga e la terza colonna si dimostra immediatamente che $\operatorname{car} A = 3$.

b) Per quale valore di b il vettore $\underline{v} = (-1, 0, 1, 2)^T$ è un autovettore della matrice A? Quanto vale l'autovalore corrispondente?

Basta calcolare

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & b & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 + b \\ -4 \end{pmatrix}$$

ed osservare che il risultato è un multiplo di $\underline{v}$ se e solo se $b = 2$. In tal caso $A\underline{v} = -2\underline{v}$ e quindi l'autovalore corrispondente è -2.

c) Per il valore di b individuato nel punto precedente, trovare gli autovalori di A.

Per $b = 2$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Quindi gli autovalori si trovano calcolando le radici del polinomio

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2-\lambda & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix}.$$

Anche qui conviene sottrarre la terza colonna alla prima (e sommare alla seconda colonna λ per la terza colonna), ottenendo così

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2+\lambda & -3+2\lambda-\lambda^2 & 2-\lambda & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-\lambda & 2 \\ -2+\lambda & -3+2\lambda-\lambda^2 & -2 \\ -4 & -5 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & \lambda-\lambda^2 & 0 \\ -2+\lambda & 3-\lambda & -2 \\ -4 & -5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+2),$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sommato la seconda riga alla prima. Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$ (semplice) e $\lambda_3 = -2$ (semplice).

d) La matrice A (sempre con il valore di b individuato al punto b)) è diagonalizzabile?

Abbiamo appena visto che la molteplicità algebrica di λ_1 è $m_1 = 2$. La molteplicità geometrica è invece $d_1 = 4 - \operatorname{car} A$. Ma abbiamo visto nel punto a) che $\operatorname{car} A = 3$ se $b = 2$. Quindi $d_1 = 4 - 3 = 1$, cosicché l'autovalore λ_1 non è regolare e la matrice A non è diagonalizzabile (per $b = 2$).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
16 febbraio 2012 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Dati i vettori $\underline{v}_1 = (2; -1; 1)$, $\underline{v}_2 = (-2; 2; 3)$ e $\underline{v}_3 = (10; -7; k)$, studiare, al variare di k, la dipendenza o indipendenza lineare e, nei vari casi, indicare la dimensione del sottospazio V da essi generato.

Si vede immediatamente che v_1 e v_2 non sono linearmente dipendenti perché non sono proporzionali. Quindi il sottospazio V che essi generano è di dimensione 2.

La dimensione di V può essere quindi 2 o 3 secondo che $\underline{v}_3 \in V$ o no. Per sapere se $\underline{v}_3$ sta in V ci basta calcolare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 3 & k \end{pmatrix}$$

Questa matrice può avere caratteristica 2 o 3 e ha caratteristica 2 se e soltanto se $\det A = 0$. Non è difficile verificare che $\det A = 2k + 6$ (come al solito è più furbo usare un ± 1 per fabbricare degli zeri in una riga o una colonna piuttosto che buttarsi a capofitto nel calcolo del determinante). La dimensione del sottospazio V è quindi 2 se $k = -3$ e 3 se no.

b) Determinare, al variare di k, se il vettore

$$\underline{w} = (10; -8; -7)$$

appartiene o no al sottospazio V.

Se $k \neq -3$ è sicuro che $\underline{w} \in V$ poiché $V = \mathbb{R}^3$.

Nel caso $k = -3$ abbiamo visto che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ costituiscono una base di V. Quindi basta, di nuovo, calcolare il determinante della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -8 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Il calcolo del determinante non pone nessun problema (ma si consiglia lo stesso di fabbricare degli zeri). È effettivamente uguale a 0 e quindi anche nel caso $k = -3$ abbiamo $\underline{w} \in V$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 10a - 2 \\ 3x - y + z = -4a + 6 \\ 4x - y + 2z = 8a - 4 \\ 5x - 2y + z = -6a + 8 \end{cases}$$

dipendente da un parametro reale a.

a) Per quale valore del parametro a il sistema ha soluzioni?

Possiamo applicare il teorema di Rouché-Capelli, ossia confrontare la caratteristica della matrice dei coefficienti A con quella della matrice completa B, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 10a-2 \\ 3 & -1 & 1 & -4a+6 \\ 4 & -1 & 2 & 8a-4 \\ 5 & -2 & 1 & -6a+8 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che $\operatorname{car} A = 2$. Infatti il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è diverso da zero, mentre le due sottomatrici 3×3 che la orlano (ossia, quelle che si ottengono eliminando da A la terza o la quarta riga) hanno entrambe determinante nullo.

Per calcolare $\operatorname{car} B$ basta considerare le altre due matrici 3×3 che orlano la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra, ossia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a-2 \\ 3 & -1 & -4a+6 \\ 4 & -1 & 8a-4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a-2 \\ 3 & -1 & -4a+6 \\ 5 & -2 & -6a+8 \end{pmatrix}.$$

Esse hanno, rispettivamente, determinante uguale a $54(1-a)$ e $16(1-a)$. Pertanto $\operatorname{car} B = 2$ se $a = 1$, mentre $\operatorname{car} B = 3$ se $a \neq 1$.

Conclusione: se $a = 1$ le due caratteristiche coincidono e il sistema ha soluzioni (per la precisione, ∞^1 soluzioni); se invece $a \neq 1$ il sistema non ha soluzioni.

b) Per il valore di a individuato nel punto precedente, trovare le soluzioni del sistema.

Per $a = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 8 \\ 3x - y + z = 2 \\ 4x - y + 2z = 4 \\ 5x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

In base a quanto visto nel punto precedente, possiamo eliminare la terza e la quarta equazione e trattare z come un parametro, ossia considerare il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 8 - 4z \\ 3x - y = 2 - z \end{cases}$$

È facile vedere che le soluzioni sono $x = 2 - z$, $y = 4 - 2z$, con z arbitrario. Come previsto, esse sono ∞^1.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & b & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro reale b.

a) Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro b.

Iniziamo con il calcolare il determinante di A. Sottraendo la terza colonna alla prima non è difficile vedere che $\det A = 3(2 - b)$. Quindi $\operatorname{car} A = 4$ se $b \neq 2$. Se invece $b = 2$, eliminando la terza riga e la terza colonna si dimostra immediatamente che $\operatorname{car} A = 3$.

b) Per quale valore di b il vettore $\underline{v} = (-1, 0, 1, 2)^T$ è un autovettore della matrice A? Quanto vale l'autovalore corrispondente?

Basta calcolare

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & b & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 + b \\ 6 \end{pmatrix}$$

ed osservare che il risultato è un multiplo di $\underline{v}$ se e solo se $b = 2$. In tal caso $A\underline{v} = +3\underline{v}$ e quindi l'autovalore corrispondente è 3.

c) Per il valore di b individuato nel punto precedente, trovare gli autovalori di A.

Per $b = 2$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Quindi gli autovalori si trovano calcolando le radici del polinomio

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & -1 & -3 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2-\lambda & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} .$$

Anche qui conviene sottrarre la terza colonna alla prima (e sommare alla seconda colonna λ per la terza colonna), ottenendo così

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3+\lambda & 2+2\lambda-\lambda^2 & 2-\lambda & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2-\lambda & -3 \\ 3+\lambda & 2+2\lambda-\lambda^2 & 3 \\ 6 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & \lambda-\lambda^2 & 0 \\ 3+\lambda & -2-\lambda & 3 \\ 6 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-3),$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sommato la seconda riga alla prima. Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$ (semplice) e $\lambda_3 = 3$ (semplice).

d) La matrice A (sempre con il valore di b individuato al punto b)) è diagonalizzabile?

Abbiamo appena visto che la molteplicità algebrica di λ_1 è $m_1 = 2$. La molteplicità geometrica è invece $d_1 = 4 - \operatorname{car} A$. Ma abbiamo visto nel punto a) che $\operatorname{car} A = 3$ se $b = 2$. Quindi $d_1 = 4 - 3 = 1$, cosicché l'autovalore λ_1 non è regolare e la matrice A non è diagonalizzabile (per $b = 2$).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
16 febbraio 2012 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Dati i vettori $\underline{v}_1 = (-1; 1; -3)$, $\underline{v}_2 = (1; -2; -2)$ e $\underline{v}_3 = (-5; 7; k)$, studiare, al variare di k, la dipendenza o indipendenza lineare e, nei vari casi, indicare la dimensione del sottospazio V da essi generato.

Si vede immediatamente che v_1 e v_2 non sono linearmente dipendenti perché non sono proporzionali. Quindi il sottospazio V che essi generano è di dimensione 2.

La dimensione di V può essere quindi 2 o 3 secondo che $\underline{v}_3 \in V$ o no. Per sapere se $\underline{v}_3$ sta in V ci basta calcolare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \\ -3 & -2 & k \end{pmatrix}$$

Questa matrice può avere caratteristica 2 o 3 e ha caratteristica 2 se e soltanto se $\det A = 0$. Non è difficile verificare che $\det A = k + 5$ (come al solito è più furbo usare un ± 1 per fabbricare degli zeri in una riga o una colonna piuttosto che buttarsi a capofitto nel calcolo del determinante). La dimensione del sottospazio V è quindi 2 se $k = -5$ e 3 se no.

b) Determinare, al variare di k, se il vettore

$$\underline{w} = (-5; 8; 0)$$

appartiene o no al sottospazio V.

Se $k \neq -5$ è sicuro che $\underline{w} \in V$ poiché $V = \mathbb{R}^3$.

Nel caso $k = -5$ abbiamo visto che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ costituiscono una base di V. Quindi basta, di nuovo, calcolare il determinante della matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 8 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il calcolo del determinante non pone nessun problema (ma si consiglia lo stesso di fabbricare degli zeri). È effettivamente uguale a 0 e quindi anche nel caso $k = -5$ abbiamo $\underline{w} \in V$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 10a - 14 \\ 3x - y + z = -4a + 3 \\ 4x - y + 2z = 8a - 10 \\ 5x - 2y + z = -6a + 5 \end{cases}$$

dipendente da un parametro reale a.

a) Per quale valore del parametro a il sistema ha soluzioni?

Possiamo applicare il teorema di Rouché-Capelli, ossia confrontare la caratteristica della matrice dei coefficienti A con quella della matrice completa B, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 10a - 14 \\ 3 & -1 & 1 & -4a + 3 \\ 4 & -1 & 2 & 8a - 10 \\ 5 & -2 & 1 & -6a + 5 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che $\operatorname{car} A = 2$. Infatti il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è diverso da zero, mentre le due sottomatrici 3×3 che la orlano (ossia, quelle che si ottengono eliminando da A la terza o la quarta riga) hanno entrambe determinante nullo.

Per calcolare $\operatorname{car} B$ basta considerare le altre due matrici 3×3 che orlano la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra, ossia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 14 \\ 3 & -1 & -4a + 3 \\ 4 & -1 & 8a - 10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 14 \\ 3 & -1 & -4a + 3 \\ 5 & -2 & -6a + 5 \end{pmatrix}.$$

Esse hanno, rispettivamente, determinante uguale a $54(1 - a)$ e $16(1 - a)$. Pertanto $\operatorname{car} B = 2$ se $a = 1$, mentre $\operatorname{car} B = 3$ se $a \neq 1$.

Conclusione: se $a = 1$ le due caratteristiche coincidono e il sistema ha soluzioni (per la precisione, ∞^1 soluzioni); se invece $a \neq 1$ il sistema non ha soluzioni.

b) Per il valore di a individuato nel punto precedente, trovare le soluzioni del sistema.

Per $a = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = -4 \\ 3x - y + z = -1 \\ 4x - y + 2z = -2 \\ 5x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

In base a quanto visto nel punto precedente, possiamo eliminare la terza e la quarta equazione e trattare z come un parametro, ossia considerare il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = -4 - 4z \\ 3x - y = -1 - z \end{cases}$$

È facile vedere che le soluzioni sono $x = -1 - z$, $y = -2 - 2z$, con z arbitrario. Come previsto, esse sono ∞^1.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & b & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro reale b.

a) Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro b.

Iniziamo con il calcolare il determinante di A. Sottraendo la terza colonna alla prima non è difficile vedere che $\det A = 2(2 - b)$. Quindi $\operatorname{car} A = 4$ se $b \neq 2$. Se invece $b = 2$, eliminando la terza riga e la terza colonna si dimostra immediatamente che $\operatorname{car} A = 3$.

b) Per quale valore di b il vettore $\underline{v} = (-1, 0, 1, 2)^T$ è un autovettore della matrice A? Quanto vale l'autovalore corrispondente?

Basta calcolare

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & b & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ +b \\ 4 \end{pmatrix}$$

ed osservare che il risultato è un multiplo di $\underline{v}$ se e solo se $b = 2$. In tal caso $A\underline{v} = +2\underline{v}$ e quindi l'autovalore corrispondente è 2.

c) Per il valore di b individuato nel punto precedente, trovare gli autovalori di A.

Per $b = 2$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Quindi gli autovalori si trovano calcolando le radici del polinomio

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2-\lambda & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} .$$

Anche qui conviene sottrarre la terza colonna alla prima (e sommare alla seconda colonna λ per la terza colonna), ottenendo così

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2+\lambda & 1+2\lambda-\lambda^2 & 2-\lambda & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1-\lambda & -2 \\ 2+\lambda & 1+2\lambda-\lambda^2 & 2 \\ 4 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & \lambda-\lambda^2 & 0 \\ 2+\lambda & -1-\lambda & 2 \\ 4 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2),$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sommato la seconda riga alla prima. Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$ (semplice) e $\lambda_3 = 2$ (semplice).

d) La matrice A (sempre con il valore di b individuato al punto b)) è diagonalizzabile?

Abbiamo appena visto che la molteplicità algebrica di λ_1 è $m_1 = 2$. La molteplicità geometrica è invece $d_1 = 4 - \operatorname{car} A$. Ma abbiamo visto nel punto a) che $\operatorname{car} A = 3$ se $b = 2$. Quindi $d_1 = 4 - 3 = 1$, cosicché l'autovalore λ_1 non è regolare e la matrice A non è diagonalizzabile (per $b = 2$).