Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
16 febbraio 2012 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri l'equazione

$$(*) \qquad (z+2-2i)^4 = 64i$$

a) Trovare le soluzioni dell'equazione
$$z^4 = 64i$$
(si fa presente che $64 = 2^6$).

Sia $w = 64i$. Abbiamo $|w| = 64$ e $\arg w = \frac{\pi}{2}$ per cui le sue radici quarte sono
$$2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}i^k, \quad k \in \{0;1;2;3\}\ .$$

b) Trovare le soluzioni dell'equazione (*)

Vista la risposta alla domanda precedente, le soluzioni dell'equazione sono
$$z_k = -2+2i+2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}}, \quad k \in \{0;1;2;3\}\ .$$

c) Posizionare le soluzioni dell'equazione (*) nel piano di Gauss.

d) Quale figura geometrica si ottiene?

Si ottiene un quadrato, che è il traslato del quadrato formato dalle radici quarte di $64i$.

e) Indicare il centro e la lunghezza dei lati della figura geometrica di cui sopra.

Il centro è $-2+2i$. La lunghezza di un lato si può ottenere calcolando esplicitamente le coordinate di due spigoli successivi, ma è più conveniente sfruttare il fatto che conosciamo la lunghezza della diagonale. Infatti una diagonale è il segmento che congiunge z_0 a z_2 (l'altra congiunge z_1 a z_3). Ora, $z_2 - z_0$ ha modulo $2\sqrt[4]{|w|} = 4\sqrt{2}$ e quindi, per il teorema di Pitagora, il lato ha lunghezza 4.

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 10a - 18 \\ 3x - y + z = -4a + 2 \\ 4x - y + 2z = 8a - 12 \\ 5x - 2y + z = -6a + 4 \end{cases}$$

dipendente da un parametro reale a.

a) Per quale valore del parametro a il sistema ha soluzioni?

Possiamo applicare il teorema di Rouché-Capelli, ossia confrontare la caratteristica della matrice dei coefficienti A con quella della matrice completa B, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 10a - 18 \\ 3 & -1 & 1 & -4a + 2 \\ 4 & -1 & 2 & 8a - 12 \\ 5 & -2 & 1 & -6a + 4 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che $\operatorname{car} A = 2$. Infatti il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è diverso da zero, mentre le due sottomatrici 3×3 che la orlano (ossia, quelle che si ottengono eliminando da A la terza o la quarta riga) hanno entrambe determinante nullo.

Per calcolare $\operatorname{car} B$ basta considerare le altre due matrici 3×3 che orlano la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra, ossia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 18 \\ 3 & -1 & -4a + 2 \\ 4 & -1 & 8a - 12 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 18 \\ 3 & -1 & -4a + 2 \\ 5 & -2 & -6a + 4 \end{pmatrix}.$$

Esse hanno, rispettivamente, determinante uguale a $54(1 - a)$ e $16(1 - a)$. Pertanto $\operatorname{car} B = 2$ se $a = 1$, mentre $\operatorname{car} B = 3$ se $a \neq 1$.

Conclusione: se $a = 1$ le due caratteristiche coincidono e il sistema ha soluzioni (per la precisione, ∞^1 soluzioni); se invece $a \neq 1$ il sistema non ha soluzioni.

b) Per il valore di a individuato nel punto precedente, trovare le soluzioni del sistema.

Per $a = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = -8 \\ 3x - y + z = -2 \\ 4x - y + 2z = -4 \\ 5x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

In base a quanto visto nel punto precedente, possiamo eliminare la terza e la quarta equazione e trattare z come un parametro, ossia considerare il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = -8 - 4z \\ 3x - y = -2 - z \end{cases}$$

È facile vedere che le soluzioni sono $x = -2 - z$, $y = -4 - 2z$, con z arbitrario. Come previsto, esse sono ∞^1.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni infinitamente differenziabili (non si richiede di dimostrare che è uno spazio vettoriale).
Si consideri in V il sottoinsieme

$$W_k = \{f \in V : \forall x, f''(x) + xf'(x) + f(x) + (k^3 - 1)(f(x))^2 + (k^2 - 1) = 0\}$$

a) Per quali valori di k il sottoinsieme W_k è un sottospazio vettoriale di V?

Una condizione necessaria per essere un sottospazio vettoriale è che il vettore nullo sia in W_k. Il vettore nullo di V è la funzione identicamente nulla, per cui la funzione nulla deve soddisfare l'equazione di W_k. Per questa ragione dobbiamo avere

$$0 + 0 + 0 + (k^3 - 1)0^2 + (k^2 - 1) = 0$$

cioè

$$k^2 - 1 = 0$$

ovvero

$$k = \pm 1 \ .$$

- Se $k = 1$, non è difficile verificare che W_1 è un sottospazio vettoriale. L'equazione che lo definisce diventa

  $$\forall x, f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$$

  Di conseguenza W_1 contiene la funzione nulla, se una funzione f vi appartiene tutti i suoi multipli λf per $\lambda \in \mathbb{R}$ vi appartengono e se f_1 e f_2 appartengono a W_1, anche $f_1 + f_2$ vi appartiene (si usa il fatto che $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$ e $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$).
- Se invece $k = -1$, le funzioni costanti che appartengono a W_{-1}, sono quelle per cui $f(x) = c$ con

  $$c - 2c^2 = 0 \ .$$

  cioè $c = 0$ o $c = \frac{1}{2}$. Perciò la funzione costante $f(x) = \frac{1}{2}$ non avrà tutti i suoi multipli in W_{-1} (gli unici multipli di f che appartengono a W_{-1} sono 0 e f) e quindi W_{-1} non è un sottospazio vettoriale.

Quindi W_k è un sottospazio vettoriale soltanto per $k = 1$.

b) Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} F : V &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f &\longmapsto \big(f(0), f'(0)\big) \end{aligned}$$

Dimostrare che F è un'applicazione lineare.

Siano f e $g \in W_k$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \big((f+g)(0), (f+g)'(0)\big) = \big(f(0)+g(0), (f'+g')(0)\big) \\ &= \big(f(0)+g(0), f'(0)+g'(0)\big) = \big(f(0), f'(0)\big) + \big(g(0), g'(0)\big) \\ &= F(f) + F(g) \\ F(\lambda f) &= \big((\lambda f)(0), (\lambda f)'(0)\big) = \big(\lambda f(0), (\lambda \cdot f')(0)\big) \\ &= \big(\lambda f(0), \lambda f'(0)\big) = \lambda\big(f(0), f'(0)\big) \\ &= \lambda F(f) \end{aligned}$$

Quindi F è effettivamente lineare.

Nota: siccome era chiesto di dimostrare che F è lineare, è inutile verificare che l'immagine del vettore nullo è il vettore nullo; è sicuramente così (o, se non lo fosse, sarebbe il segnale di un errore).

c) Sia k tale che W_k sia un sottospazio vettoriale (il valore preciso di k non incide sulla domanda). Sapendo (non se ne chiede la dimostrazione) che la restrizione di F a W_k è una biiezione, qual è la dimensione di W_k ?

Siccome $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2 anche W_k ha dimensione 2.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & b & -1 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro reale b.

a) Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro b.

Iniziamo con il calcolare il determinante di A. Sottraendo la terza colonna alla prima non è difficile vedere che $\det A = b - 2$. Quindi $\operatorname{car} A = 4$ se $b \neq 2$. Se invece $b = 2$, eliminando la terza riga e la terza colonna si dimostra immediatamente che $\operatorname{car} A = 3$.

b) Per quale valore di b il vettore $\underline{v} = (-1, 0, 1, 2)^T$ è un autovettore della matrice A? Quanto vale l'autovalore corrispondente?

Basta calcolare

$$A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & -2 & b & -1\\-2 & -3 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3+b\\-2\end{pmatrix}$$

ed osservare che il risultato è un multiplo di $\underline{v}$ se e solo se $b = 2$. In tal caso $A\underline{v} = -\underline{v}$ e quindi l'autovalore corrispondente è -1.

c) Per il valore di b individuato nel punto precedente, trovare gli autovalori di A.

Per $b = 2$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & -2 & 2 & -1\\-2 & -3 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Quindi gli autovalori si trovano calcolando le radici del polinomio

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix}-\lambda & 2 & -1 & 1\\1 & -\lambda & 1 & 0\\1 & -2 & 2-\lambda & -1\\-2 & -3 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}.$$

Anche qui conviene sottrarre la terza colonna alla prima (e sommare alla seconda colonna λ per la terza colonna), ottenendo così

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2-\lambda & -1 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\-1+\lambda & -2+2\lambda-\lambda^2 & 2-\lambda & -1\\-2 & -3 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1-\lambda & 2-\lambda & 1\\-1+\lambda & -2+2\lambda-\lambda^2 & -1\\-2 & -3 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix}0 & \lambda-\lambda^2 & 0\\-1+\lambda & 2-\lambda & -1\\-2 & -3 & -2-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1),$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sommato la seconda riga alla prima. Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$ (semplice) e $\lambda_3 = -1$ (semplice).

d) La matrice A (sempre con il valore di b individuato al punto b)) è diagonalizzabile?

Abbiamo appena visto che la molteplicità algebrica di λ_1 è $m_1 = 2$. La molteplicità geometrica è invece $d_1 = 4 - \operatorname{car} A$. Ma abbiamo visto nel punto a) che $\operatorname{car} A = 3$ se $b = 2$. Quindi $d_1 = 4 - 3 = 1$, cosicché l'autovalore λ_1 non è regolare e la matrice A non è diagonalizzabile (per $b = 2$).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
16 febbraio 2012 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri l'equazione

$$(z+1-2i)^4 = 4i \tag{*}$$

a) Trovare le soluzioni dell'equazione
$$z^4 = 4i$$
.

Sia $w = 4i$. Abbiamo $|w| = 4$ e $\arg w = \frac{\pi}{2}$ per cui le sue radici quarte sono
$$\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}i^k, \quad k \in \{0;1;2;3\} .$$

b) Trovare le soluzioni dell'equazione (*)

Vista la risposta alla domanda precedente, le soluzioni dell'equazione sono
$$z_k = -1+2i+\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}}, \quad k \in \{0;1;2;3\} .$$

c) Posizionare le soluzioni dell'equazione (*) nel piano di Gauss.

d) Quale figura geometrica si ottiene?

Si ottiene un quadrato, che è il traslato del quadrato formato dalle radici quarte di $4i$.

e) Indicare il centro e la lunghezza dei lati della figura geometrica di cui sopra.

Il centro è $-1+2i$. La lunghezza di un lato si può ottenere calcolando esplicitamente le coordinate di due spigoli successivi, ma è più conveniente sfruttare il fatto che conosciamo la lunghezza della diagonale. Infatti una diagonale è il segmento che congiunge z_0 a z_2 (l'altra congiunge z_1 a z_3). Ora, $z_2 - z_0$ ha modulo $2\sqrt[4]{|w|} = 2\sqrt{2}$ e quindi, per il teorema di Pitagora, il lato ha lunghezza 2.

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 10a - 6 \\ 3x - y + z = -4a + 5 \\ 4x - y + 2z = 8a - 6 \\ 5x - 2y + z = -6a + 7 \end{cases}$$

dipendente da un parametro reale a.

a) Per quale valore del parametro a il sistema ha soluzioni?

Possiamo applicare il teorema di Rouché-Capelli, ossia confrontare la caratteristica della matrice dei coefficienti A con quella della matrice completa B, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 10a - 6 \\ 3 & -1 & 1 & -4a + 5 \\ 4 & -1 & 2 & 8a - 6 \\ 5 & -2 & 1 & -6a + 7 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che $\operatorname{car} A = 2$. Infatti il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è diverso da zero, mentre le due sottomatrici 3×3 che la orlano (ossia, quelle che si ottengono eliminando da A la terza o la quarta riga) hanno entrambe determinante nullo.

Per calcolare $\operatorname{car} B$ basta considerare le altre due matrici 3×3 che orlano la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra, ossia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 6 \\ 3 & -1 & -4a + 5 \\ 4 & -1 & 8a - 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 6 \\ 3 & -1 & -4a + 5 \\ 5 & -2 & -6a + 7 \end{pmatrix}.$$

Esse hanno, rispettivamente, determinante uguale a $54(1 - a)$ e $16(1 - a)$. Pertanto $\operatorname{car} B = 2$ se $a = 1$, mentre $\operatorname{car} B = 3$ se $a \neq 1$.

Conclusione: se $a = 1$ le due caratteristiche coincidono e il sistema ha soluzioni (per la precisione, ∞^1 soluzioni); se invece $a \neq 1$ il sistema non ha soluzioni.

b) Per il valore di a individuato nel punto precedente, trovare le soluzioni del sistema.

Per $a = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 4 \\ 3x - y + z = 1 \\ 4x - y + 2z = 2 \\ 5x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

In base a quanto visto nel punto precedente, possiamo eliminare la terza e la quarta equazione e trattare z come un parametro, ossia considerare il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 4 - 4z \\ 3x - y = 1 - z \end{cases}$$

È facile vedere che le soluzioni sono $x = 1 - z$, $y = 2 - 2z$, con z arbitrario. Come previsto, esse sono ∞^1.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni infinitamente differenziabili (non si richiede di dimostrare che è uno spazio vettoriale).
Si consideri in V il sottoinsieme

$$W_k = \{f \in V : \forall x, f''(x) + xf'(x) + f(x) + (k^3 + 8)(f(x))^2 + (k^2 - 4) = 0\}$$

a) Per quali valori di k il sottoinsieme W_k è un sottospazio vettoriale di V?

Una condizione necessaria per essere un sottospazio vettoriale è che il vettore nullo sia in W_k. Il vettore nullo di V è la funzione identicamente nulla, per cui la funzione nulla deve soddisfare l'equazione di W_k. Per questa ragione dobbiamo avere

$$0 + 0 + 0 + (k^3 + 8)0^2 + (k^2 - 4) = 0$$

cioè

$$k^2 - 4 = 0$$

ovvero

$$k = \pm 2 \ .$$

- Se $k = -2$, non è difficile verificare che W_{-2} è un sottospazio vettoriale. L'equazione che lo definisce diventa

$$\forall x, f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$$

  Di conseguenza W_{-2} contiene la funzione nulla, se una funzione f vi appartiene tutti i suoi multipli λf per $\lambda \in \mathbb{R}$ vi appartengono e se f_1 e f_2 appartengono a W_{-2}, anche $f_1 + f_2$ vi appartiene (si usa il fatto che $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$ e $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$).
- Se invece $k = 2$, le funzioni costanti che appartengono a W_2, sono quelle per cui $f(x) = c$ con

$$c + 16c^2 = 0 \ .$$

  cioè $c = 0$ o $c = -\frac{1}{16}$. Perciò la funzione costante $f(x) = -\frac{1}{16}$ non avrà tutti i suoi multipli in W_2 (gli unici multipli di f che appartengono a W_2 sono 0 e f) e quindi W_2 non è un sottospazio vettoriale.

Quindi W_k è un sottospazio vettoriale soltanto per $k = -2$.

b) Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} F : V &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f &\longmapsto \big(f(0), f'(0)\big) \end{aligned}$$

Dimostrare che F è un'applicazione lineare.

Siano f e $g \in W_k$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \big((f+g)(0), (f+g)'(0)\big) = \big(f(0)+g(0), (f'+g')(0)\big) \\ &= \big(f(0)+g(0), f'(0)+g'(0)\big) = \big(f(0), f'(0)\big) + \big(g(0), g'(0)\big) \\ &= F(f) + F(g) \\ F(\lambda f) &= \big((\lambda f)(0), (\lambda f)'(0)\big) = \big(\lambda f(0), (\lambda \cdot f')(0)\big) \\ &= \big(\lambda f(0), \lambda f'(0)\big) = \lambda\big(f(0), f'(0)\big) \\ &= \lambda F(f) \end{aligned}$$

Quindi F è effettivamente lineare.

Nota: siccome era chiesto di dimostrare che F è lineare, è inutile verificare che l'immagine del vettore nullo è il vettore nullo; è sicuramente così (o, se non lo fosse, sarebbe il segnale di un errore).

c) Sia k tale che W_k sia un sottospazio vettoriale (il valore preciso di k non incide sulla domanda). Sapendo (non se ne chiede la dimostrazione) che la restrizione di F a W_k è una biiezione, qual è la dimensione di W_k ?

Siccome $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2 anche W_k ha dimensione 2.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & b & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro reale b.

a) Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro b.

Iniziamo con il calcolare il determinante di A. Sottraendo la terza colonna alla prima non è difficile vedere che $\det A = 2(b-2)$. Quindi $\operatorname{car} A = 4$ se $b \neq 2$. Se invece $b = 2$, eliminando la terza riga e la terza colonna si dimostra immediatamente che $\operatorname{car} A = 3$.

b) Per quale valore di b il vettore $\underline{v} = (-1, 0, 1, 2)^T$ è un autovettore della matrice A? Quanto vale l'autovalore corrispondente?

Basta calcolare

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & b & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4+b \\ -4 \end{pmatrix}$$

ed osservare che il risultato è un multiplo di $\underline{v}$ se e solo se $b = 2$. In tal caso $A\underline{v} = -2\underline{v}$ e quindi l'autovalore corrispondente è -2.

c) Per il valore di b individuato nel punto precedente, trovare gli autovalori di A.

Per $b = 2$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Quindi gli autovalori si trovano calcolando le radici del polinomio

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2-\lambda & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix}.$$

Anche qui conviene sottrarre la terza colonna alla prima (e sommare alla seconda colonna λ per la terza colonna), ottenendo così

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2+\lambda & -3+2\lambda-\lambda^2 & 2-\lambda & -2 \\ -4 & -5 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-\lambda & 2 \\ -2+\lambda & -3+2\lambda-\lambda^2 & -2 \\ -4 & -5 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & \lambda-\lambda^2 & 0 \\ -2+\lambda & 3-\lambda & -2 \\ -4 & -5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+2),$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sommato la seconda riga alla prima. Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$ (semplice) e $\lambda_3 = -2$ (semplice).

d) La matrice A (sempre con il valore di b individuato al punto b)) è diagonalizzabile?

Abbiamo appena visto che la molteplicità algebrica di λ_1 è $m_1 = 2$. La molteplicità geometrica è invece $d_1 = 4 - \operatorname{car} A$. Ma abbiamo visto nel punto a) che $\operatorname{car} A = 3$ se $b = 2$. Quindi $d_1 = 4 - 3 = 1$, cosicché l'autovalore λ_1 non è regolare e la matrice A non è diagonalizzabile (per $b = 2$).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
16 febbraio 2012 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri l'equazione

$$(z-2-2i)^4 = 4i \tag{*}$$

a) Trovare le soluzioni dell'equazione
$$z^4 = 4i$$
.

Sia $w = 4i$. Abbiamo $|w| = 4$ e $\arg w = \frac{\pi}{2}$ per cui le sue radici quarte sono
$$\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}i^k, \quad k \in \{0;1;2;3\}\ .$$

b) Trovare le soluzioni dell'equazione (*)

Vista la risposta alla domanda precedente, le soluzioni dell'equazione sono
$$z_k = 2+2i+\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}}, \quad k \in \{0;1;2;3\}\ .$$

c) Posizionare le soluzioni dell'equazione (*) nel piano di Gauss.

d) Quale figura geometrica si ottiene?

Si ottiene un quadrato, che è il traslato del quadrato formato dalle radici quarte di $4i$.

e) Indicare il centro e la lunghezza dei lati della figura geometrica di cui sopra.

Il centro è $2+2i$. La lunghezza di un lato si può ottenere calcolando esplicitamente le coordinate di due spigoli successivi, ma è più conveniente sfruttare il fatto che conosciamo la lunghezza della diagonale. Infatti una diagonale è il segmento che congiunge z_0 a z_2 (l'altra congiunge z_1 a z_3). Ora, $z_2 - z_0$ ha modulo $2\sqrt[4]{|w|} = 2\sqrt{2}$ e quindi, per il teorema di Pitagora, il lato ha lunghezza 2.

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 10a - 2 \\ 3x - y + z = -4a + 6 \\ 4x - y + 2z = 8a - 4 \\ 5x - 2y + z = -6a + 8 \end{cases}$$

dipendente da un parametro reale a.

a) Per quale valore del parametro a il sistema ha soluzioni?

Possiamo applicare il teorema di Rouché-Capelli, ossia confrontare la caratteristica della matrice dei coefficienti A con quella della matrice completa B, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 10a-2 \\ 3 & -1 & 1 & -4a+6 \\ 4 & -1 & 2 & 8a-4 \\ 5 & -2 & 1 & -6a+8 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che $\operatorname{car} A = 2$. Infatti il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è diverso da zero, mentre le due sottomatrici 3×3 che la orlano (ossia, quelle che si ottengono eliminando da A la terza o la quarta riga) hanno entrambe determinante nullo.

Per calcolare $\operatorname{car} B$ basta considerare le altre due matrici 3×3 che orlano la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra, ossia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a-2 \\ 3 & -1 & -4a+6 \\ 4 & -1 & 8a-4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a-2 \\ 3 & -1 & -4a+6 \\ 5 & -2 & -6a+8 \end{pmatrix}.$$

Esse hanno, rispettivamente, determinante uguale a $54(1-a)$ e $16(1-a)$. Pertanto $\operatorname{car} B = 2$ se $a = 1$, mentre $\operatorname{car} B = 3$ se $a \neq 1$.

Conclusione: se $a = 1$ le due caratteristiche coincidono e il sistema ha soluzioni (per la precisione, ∞^1 soluzioni); se invece $a \neq 1$ il sistema non ha soluzioni.

b) Per il valore di a individuato nel punto precedente, trovare le soluzioni del sistema.

Per $a = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 8 \\ 3x - y + z = 2 \\ 4x - y + 2z = 4 \\ 5x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

In base a quanto visto nel punto precedente, possiamo eliminare la terza e la quarta equazione e trattare z come un parametro, ossia considerare il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 8 - 4z \\ 3x - y = 2 - z \end{cases}$$

È facile vedere che le soluzioni sono $x = 2 - z$, $y = 4 - 2z$, con z arbitrario. Come previsto, esse sono ∞^1.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni infinitamente differenziabili (non si richiede di dimostrare che è uno spazio vettoriale).
Si consideri in V il sottoinsieme

$$W_k = \{f \in V : \forall x, f''(x) + xf'(x) + f(x) + (k^3 + 1)(f(x))^2 + (k^2 - 1) = 0\}$$

a) Per quali valori di k il sottoinsieme W_k è un sottospazio vettoriale di V?

Una condizione necessaria per essere un sottospazio vettoriale è che il vettore nullo sia in W_k. Il vettore nullo di V è la funzione identicamente nulla, per cui la funzione nulla deve soddisfare l'equazione di W_k. Per questa ragione dobbiamo avere

$$0 + 0 + 0 + (k^3 + 1)0^2 + (k^2 - 1) = 0$$

cioè

$$k^2 - 1 = 0$$

ovvero

$$k = \pm 1 \ .$$

- Se $k = -1$, non è difficile verificare che W_{-1} è un sottospazio vettoriale. L'equazione che lo definisce diventa

$$\forall x, f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$$

  Di conseguenza W_{-1} contiene la funzione nulla, se una funzione f vi appartiene tutti i suoi multipli λf per $\lambda \in \mathbb{R}$ vi appartengono e se f_1 e f_2 appartengono a W_{-1}, anche $f_1 + f_2$ vi appartiene (si usa il fatto che $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$ e $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$).
- Se invece $k = 1$, le funzioni costanti che appartengono a W_1, sono quelle per cui $f(x) = c$ con

$$c + 2c^2 = 0 \ .$$

  cioè $c = 0$ o $c = -\frac{1}{2}$. Perciò la funzione costante $f(x) = -\frac{1}{2}$ non avrà tutti i suoi multipli in W_1 (gli unici multipli di f che appartengono a W_1 sono 0 e f) e quindi W_1 non è un sottospazio vettoriale.

Quindi W_k è un sottospazio vettoriale soltanto per $k = -1$.

b) Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} F : V &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f &\longmapsto \big(f(0), f'(0)\big) \end{aligned}$$

Dimostrare che F è un'applicazione lineare.

Siano f e $g \in W_k$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \big((f+g)(0), (f+g)'(0)\big) = \big(f(0)+g(0), (f'+g')(0)\big) \\ &= \big(f(0)+g(0), f'(0)+g'(0)\big) = \big(f(0), f'(0)\big) + \big(g(0), g'(0)\big) \\ &= F(f) + F(g) \\ F(\lambda f) &= \big((\lambda f)(0), (\lambda f)'(0)\big) = \big(\lambda f(0), (\lambda \cdot f')(0)\big) \\ &= \big(\lambda f(0), \lambda f'(0)\big) = \lambda\big(f(0), f'(0)\big) \\ &= \lambda F(f) \end{aligned}$$

Quindi F è effettivamente lineare.

Nota: siccome era chiesto di dimostrare che F è lineare, è inutile verificare che l'immagine del vettore nullo è il vettore nullo; è sicuramente così (o, se non lo fosse, sarebbe il segnale di un errore).

c) Sia k tale che W_k sia un sottospazio vettoriale (il valore preciso di k non incide sulla domanda). Sapendo (non se ne chiede la dimostrazione) che la restrizione di F a W_k è una biiezione, qual è la dimensione di W_k ?

Siccome $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2 anche W_k ha dimensione 2.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & b & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro reale b.

a) Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro b.

Iniziamo con il calcolare il determinante di A. Sottraendo la terza colonna alla prima non è difficile vedere che $\det A = 3(2-b)$. Quindi $\operatorname{car} A = 4$ se $b \neq 2$. Se invece $b = 2$, eliminando la terza riga e la terza colonna si dimostra immediatamente che $\operatorname{car} A = 3$.

b) Per quale valore di b il vettore $\underline{v} = (-1, 0, 1, 2)^T$ è un autovettore della matrice A? Quanto vale l'autovalore corrispondente?

Basta calcolare

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & b & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1+b \\ 6 \end{pmatrix}$$

ed osservare che il risultato è un multiplo di $\underline{v}$ se e solo se $b = 2$. In tal caso $A\underline{v} = +3\underline{v}$ e quindi l'autovalore corrispondente è 3.

c) Per il valore di b individuato nel punto precedente, trovare gli autovalori di A.

Per $b = 2$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Quindi gli autovalori si trovano calcolando le radici del polinomio

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & -1 & -3 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2-\lambda & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}.$$

Anche qui conviene sottrarre la terza colonna alla prima (e sommare alla seconda colonna λ per la terza colonna), ottenendo così

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3+\lambda & 2+2\lambda-\lambda^2 & 2-\lambda & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2-\lambda & -3 \\ 3+\lambda & 2+2\lambda-\lambda^2 & 3 \\ 6 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & \lambda-\lambda^2 & 0 \\ 3+\lambda & -2-\lambda & 3 \\ 6 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-3),$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sommato la seconda riga alla prima. Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$ (semplice) e $\lambda_3 = 3$ (semplice).

d) La matrice A (sempre con il valore di b individuato al punto b)) è diagonalizzabile?

Abbiamo appena visto che la molteplicità algebrica di λ_1 è $m_1 = 2$. La molteplicità geometrica è invece $d_1 = 4 - \operatorname{car} A$. Ma abbiamo visto nel punto a) che $\operatorname{car} A = 3$ se $b = 2$. Quindi $d_1 = 4 - 3 = 1$, cosicché l'autovalore λ_1 non è regolare e la matrice A non è diagonalizzabile (per $b = 2$).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
16 febbraio 2012 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri l'equazione

$$(z-1-2i)^4 = 64i \qquad (*)$$

a) Trovare le soluzioni dell'equazione
$$z^4 = 64i$$
(si fa presente che $64 = 2^6$).

Sia $w = 64i$. Abbiamo $|w| = 64$ e $\arg w = \frac{\pi}{2}$ per cui le sue radici quarte sono
$$2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}i^k, \quad k \in \{0;1;2;3\}\ .$$

b) Trovare le soluzioni dell'equazione (*)

Vista la risposta alla domanda precedente, le soluzioni dell'equazione sono
$$z_k = 1+2i+2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}+k\frac{i\pi}{2}}, \quad k \in \{0;1;2;3\}\ .$$

c) Posizionare le soluzioni dell'equazione (*) nel piano di Gauss.

d) Quale figura geometrica si ottiene?

Si ottiene un quadrato, che è il traslato del quadrato formato dalle radici quarte di $64i$.

e) Indicare il centro e la lunghezza dei lati della figura geometrica di cui sopra.

Il centro è $1+2i$. La lunghezza di un lato si può ottenere calcolando esplicitamente le coordinate di due spigoli successivi, ma è più conveniente sfruttare il fatto che conosciamo la lunghezza della diagonale. Infatti una diagonale è il segmento che congiunge z_0 a z_2 (l'altra congiunge z_1 a z_3). Ora, $z_2 - z_0$ ha modulo $2\sqrt[4]{|w|} = 4\sqrt{2}$ e quindi, per il teorema di Pitagora, il lato ha lunghezza 4.

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 10a - 14 \\ 3x - y + z = -4a + 3 \\ 4x - y + 2z = 8a - 10 \\ 5x - 2y + z = -6a + 5 \end{cases}$$

dipendente da un parametro reale a.

a) Per quale valore del parametro a il sistema ha soluzioni?

Possiamo applicare il teorema di Rouché-Capelli, ossia confrontare la caratteristica della matrice dei coefficienti A con quella della matrice completa B, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 10a - 14 \\ 3 & -1 & 1 & -4a + 3 \\ 4 & -1 & 2 & 8a - 10 \\ 5 & -2 & 1 & -6a + 5 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che $\operatorname{car} A = 2$. Infatti il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è diverso da zero, mentre le due sottomatrici 3×3 che la orlano (ossia, quelle che si ottengono eliminando da A la terza o la quarta riga) hanno entrambe determinante nullo.

Per calcolare $\operatorname{car} B$ basta considerare le altre due matrici 3×3 che orlano la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra, ossia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 14 \\ 3 & -1 & -4a + 3 \\ 4 & -1 & 8a - 10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10a - 14 \\ 3 & -1 & -4a + 3 \\ 5 & -2 & -6a + 5 \end{pmatrix}.$$

Esse hanno, rispettivamente, determinante uguale a $54(1 - a)$ e $16(1 - a)$. Pertanto $\operatorname{car} B = 2$ se $a = 1$, mentre $\operatorname{car} B = 3$ se $a \neq 1$.

Conclusione: se $a = 1$ le due caratteristiche coincidono e il sistema ha soluzioni (per la precisione, ∞^1 soluzioni); se invece $a \neq 1$ il sistema non ha soluzioni.

b) Per il valore di a individuato nel punto precedente, trovare le soluzioni del sistema.

Per $a = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = -4 \\ 3x - y + z = -1 \\ 4x - y + 2z = -2 \\ 5x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

In base a quanto visto nel punto precedente, possiamo eliminare la terza e la quarta equazione e trattare z come un parametro, ossia considerare il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = -4 - 4z \\ 3x - y = -1 - z \end{cases}$$

È facile vedere che le soluzioni sono $x = -1 - z$, $y = -2 - 2z$, con z arbitrario. Come previsto, esse sono ∞^1.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni infinitamente differenziabili (non si richiede di dimostrare che è uno spazio vettoriale).
Si consideri in V il sottoinsieme

$$W_k = \{f \in V : \forall x, f''(x) + xf'(x) + f(x) + (k^3 - 8)(f(x))^2 + (k^2 - 4) = 0\}$$

a) Per quali valori di k il sottoinsieme W_k è un sottospazio vettoriale di V?

Una condizione necessaria per essere un sottospazio vettoriale è che il vettore nullo sia in W_k. Il vettore nullo di V è la funzione identicamente nulla, per cui la funzione nulla deve soddisfare l'equazione di W_k. Per questa ragione dobbiamo avere

$$0 + 0 + 0 + (k^3 - 8)0^2 + (k^2 - 4) = 0$$

cioè

$$k^2 - 4 = 0$$

ovvero

$$k = \pm 2 \ .$$

- Se $k = 2$, non è difficile verificare che W_2 è un sottospazio vettoriale. L'equazione che lo definisce diventa

  $$\forall x, f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$$

  Di conseguenza W_2 contiene la funzione nulla, se una funzione f vi appartiene tutti i suoi multipli λf per $\lambda \in \mathbb{R}$ vi appartengono e se f_1 e f_2 appartengono a W_2, anche $f_1 + f_2$ vi appartiene (si usa il fatto che $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$ e $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$).
- Se invece $k = -2$, le funzioni costanti che appartengono a W_{-2}, sono quelle per cui $f(x) = c$ con

  $$c - 16c^2 = 0 \ .$$

  cioè $c = 0$ o $c = \frac{1}{16}$. Perciò la funzione costante $f(x) = \frac{1}{16}$ non avrà tutti i suoi multipli in W_{-2} (gli unici multipli di f che appartengono a W_{-2} sono 0 e f) e quindi W_{-2} non è un sottospazio vettoriale.

Quindi W_k è un sottospazio vettoriale soltanto per $k = 2$.

b) Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} F : V &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f &\longmapsto \big(f(0), f'(0)\big) \end{aligned}$$

Dimostrare che F è un'applicazione lineare.

Siano f e $g \in W_k$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \big((f+g)(0), (f+g)'(0)\big) = \big(f(0)+g(0), (f'+g')(0)\big) \\ &= \big(f(0)+g(0), f'(0)+g'(0)\big) = \big(f(0), f'(0)\big) + \big(g(0), g'(0)\big) \\ &= F(f) + F(g) \\ F(\lambda f) &= \big((\lambda f)(0), (\lambda f)'(0)\big) = \big(\lambda f(0), (\lambda \cdot f')(0)\big) \\ &= \big(\lambda f(0), \lambda f'(0)\big) = \lambda\big(f(0), f'(0)\big) \\ &= \lambda F(f) \end{aligned}$$

Quindi F è effettivamente lineare.

Nota: siccome era chiesto di dimostrare che F è lineare, è inutile verificare che l'immagine del vettore nullo è il vettore nullo; è sicuramente così (o, se non lo fosse, sarebbe il segnale di un errore).

c) Sia k tale che W_k sia un sottospazio vettoriale (il valore preciso di k non incide sulla domanda). Sapendo (non se ne chiede la dimostrazione) che la restrizione di F a W_k è una biiezione, qual è la dimensione di W_k ?

Siccome $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2 anche W_k ha dimensione 2.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & b & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro reale b.

a) Calcolare la caratteristica di A al variare del parametro b.

Iniziamo con il calcolare il determinante di A. Sottraendo la terza colonna alla prima non è difficile vedere che $\det A = 2(2-b)$. Quindi $\operatorname{car} A = 4$ se $b \neq 2$. Se invece $b = 2$, eliminando la terza riga e la terza colonna si dimostra immediatamente che $\operatorname{car} A = 3$.

b) Per quale valore di b il vettore $\underline{v} = (-1, 0, 1, 2)^T$ è un autovettore della matrice A? Quanto vale l'autovalore corrispondente?

Basta calcolare

$$A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1&-1&-2\\1&0&1&0\\4&1&b&2\\4&3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\+b\\4\end{pmatrix}$$

ed osservare che il risultato è un multiplo di $\underline{v}$ se e solo se $b=2$. In tal caso $A\underline{v}=+2\underline{v}$ e quindi l'autovalore corrispondente è 2.

c) Per il valore di b individuato nel punto precedente, trovare gli autovalori di A.

Per $b=2$ la matrice diventa

$$A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1&-2\\1&0&1&0\\4&1&2&2\\4&3&0&4\end{pmatrix}.$$

Quindi gli autovalori si trovano calcolando le radici del polinomio

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-3-\lambda&-1&-1&-2\\1&-\lambda&1&0\\4&1&2-\lambda&2\\4&3&0&4-\lambda\end{vmatrix}.$$

Anche qui conviene sottrarre la terza colonna alla prima (e sommare alla seconda colonna λ per la terza colonna), ottenendo così

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda&-1-\lambda&-1&-2\\0&0&1&0\\2+\lambda&1+2\lambda-\lambda^2&2-\lambda&2\\4&3&0&4-\lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2-\lambda&-1-\lambda&-2\\2+\lambda&1+2\lambda-\lambda^2&2\\4&3&4-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=-\begin{vmatrix}0&\lambda-\lambda^2&0\\2+\lambda&-1-\lambda&2\\4&3&4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2),$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sommato la seconda riga alla prima. Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1=0$ (doppio), $\lambda_2=1$ (semplice) e $\lambda_3=2$ (semplice).

d) La matrice A (sempre con il valore di b individuato al punto b)) è diagonalizzabile?

Abbiamo appena visto che la molteplicità algebrica di λ_1 è $m_1=2$. La molteplicità geometrica è invece $d_1=4-\operatorname{car}A$. Ma abbiamo visto nel punto a) che $\operatorname{car}A=3$ se $b=2$. Quindi $d_1=4-3=1$, cosicché l'autovalore λ_1 non è regolare e la matrice A non è diagonalizzabile (per $b=2$).