Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
19 gennaio 2012 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -10 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare se i tre vettori sono linearmente indipendenti.

La risposta a questa domanda sarà data nella risposta alla domanda successiva.

b) Determinare la dimensione del sottospazio V di $\mathbb{R}^5$ generato da questi tre vettori.

Il sottospazio V ha dimensione almeno 1 perché contiene il vettore $\underline{u}$ che è non nullo. Inoltre è generato da 3 vettori e quindi ha dimensione al massimo 3. Comunque per determinare la sua dimensione, il metodo più semplice è quello di calcolare la caratteristica (cioè il rango) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & -6 & 3 \\ -3 & -10 & 1 \\ 5 & 19 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha la stessa caratteristica della matrice A' ottenuta sottraendo 5 volte la prima colonna alla seconda e aggiungendo 2 volte la prima colonna all'ultima. Abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -5 \\ 5 & -6 & 6 \\ 2 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

È immediato osservare che la seconda colonna è opposta alla terza ma che queste due non sono proporzionali alla prima e quindi la matrice A' ha caratteristica 2 così come la matrice A. Il sottospazio V ha quindi dimensione 2 e quindi i vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

c) Dare una base del sottospazio V.

La domanda precedente ha dimostrato che V ha dimensione 2 quindi ogni sua base ha due vettori e ogni coppia di vettori non paralleli di V è una base di V. Basta quindi prendere due qualsiasi dei tre vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $P(1,-2,0)$ e la retta

$$r: \quad \begin{cases} 2x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ x + 4y + 5 = 0 \end{cases}$$

a) Si scriva l'equazione del piano π_1 contenente P ed r.

Il fascio di piani contenenti r ha equazione $\lambda(2x-2y+3z-5)+\mu(x+4y+5)=0$. Imponendo il passaggio per il punto P troviamo che $\lambda = 2\mu$, cosicché il piano π_1 ha equazione $5x + 6z - 5 = 0$.

b) Si scriva l'equazione del piano π_2 passante per P e perpendicolare ad r.

La direzione di r è data da $\underline{v}_r = (2,-2,3) \wedge (1,4,0) = (-12,3,10)$. L'equazione di π_2 è pertanto $-12(x-1)+3(y+2)+10(z-0)=0$, ossia $-12x+3y+10z+18=0$.

c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta s passante per P e perpendicolare ed incidente ad r.

Con un semplice disegno è facile capire che s è l'intersezione dei due piani π_1 e π_2. Per dimostrare rigorosamente questa affermazione basta osservare che:

- il punto P appartiene ad entrambi i piani e quindi alla loro intersezione s;
- la retta r è perpendicolare a π_2, quindi ad ogni retta contenuta in π_2;
- le rette r ed s appartengono entrambe al piano π_1 e sono perpendicolari, quindi sono incidenti.

Le equazioni cartesiane di s sono pertanto

$$s: \quad \begin{cases} 5x + 6z - 5 = 0 \\ -12x + 3y + 10z + 18 = 0 \end{cases}$$

Per ottenere le equazioni parametriche di s basta porre $z = t$ e risolvere rispetto ad x e ad y le due equazioni. Si ottiene

$$s: \qquad \begin{cases} x = 1 - \frac{6}{5}t \\ y = -2 - \frac{122}{15}t \\ z = t \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 8x - 2y - 2z + 3 = 0 \ .$$

Determinare la forma canonica di σ, riconoscere di che quadrica si tratta e scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 0$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -z \end{pmatrix},$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - z') \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione della quadrica nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 8x' - 2\sqrt{2}y' + 3 = 0,$$

ossia

$$4(x')^2 + 2(y')^2 + 8x' - 2\sqrt{2}y' + 3 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Z = z' \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{2}} + Y^2 = 1.$$

Essa è pertanto un cilindro (ellittico).
Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - Z) + \frac{1}{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + Z) + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
19 gennaio 2012 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare se i tre vettori sono linearmente indipendenti.

La risposta a questa domanda sarà data nella risposta alla domanda successiva.

b) Determinare la dimensione del sottospazio V di $\mathbb{R}^5$ generato da questi tre vettori.

Il sottospazio V ha dimensione almeno 1 perché contiene il vettore $\underline{u}$ che è non nullo. Inoltre è generato da 3 vettori e quindi ha dimensione al massimo 3. Comunque per determinare la sua dimensione, il metodo più semplice è quello di calcolare la caratteristica (cioè il rango) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ -3 & -7 & 1 \\ 5 & 7 & -4 \\ 2 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha la stessa caratteristica della matrice A' ottenuta aggiungendo la prima colonna alla seconda e aggiungendo 2 volte la prima colonna all'ultima. Abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & -10 & -5 \\ 5 & 12 & 6 \\ 2 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

È immediato osservare che la seconda colonna è 2 volte la terza ma che queste due non sono proporzionali alla prima e quindi la matrice A' ha caratteristica 2 così come la matrice A. Il sottospazio V ha quindi dimensione 2 e quindi i vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

c) Dare una base del sottospazio V.

La domanda precedente ha dimostrato che V ha dimensione 2 quindi ogni sua base ha due vettori e ogni coppia di vettori non paralleli di V è una base di V. Basta quindi prendere due qualsiasi dei tre vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $P(1,0,0)$ e la retta

$$r: \quad \begin{cases} 2x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ x + 4y + 5 = 0 \end{cases}$$

a) Si scriva l'equazione del piano π_1 contenente P ed r.

Il fascio di piani contenenti r ha equazione $\lambda(2x-2y+3z-5)+\mu(x+4y+5)=0$. Imponendo il passaggio per il punto P troviamo che $\lambda = 2\mu$, cosicché il piano π_1 ha equazione $5x+6z-5=0$.

b) Si scriva l'equazione del piano π_2 passante per P e perpendicolare ad r.

La direzione di r è data da $\underline{v}_r = (2,-2,3) \wedge (1,4,0) = (-12,3,10)$. L'equazione di π_2 è pertanto $-12(x-1)+3(y-0)+10(z-0)=0$, ossia $-12x+3y+10z+12=0$.

c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta s passante per P e perpendicolare ed incidente ad r.

Con un semplice disegno è facile capire che s è l'intersezione dei due piani π_1 e π_2. Per dimostrare rigorosamente questa affermazione basta osservare che:

- il punto P appartiene ad entrambi i piani e quindi alla loro intersezione s;
- la retta r è perpendicolare a π_2, quindi ad ogni retta contenuta in π_2;
- le rette r ed s appartengono entrambe al piano π_1 e sono perpendicolari, quindi sono incidenti.

Le equazioni cartesiane di s sono pertanto

$$s: \quad \begin{cases} 5x + 6z - 5 = 0 \\ -12x + 3y + 10z + 12 = 0 \end{cases}$$

Per ottenere le equazioni parametriche di s basta porre $z = t$ e risolvere rispetto ad x e ad y le due equazioni. Si ottiene

$$s: \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{6}{5}t \\ y = -\frac{122}{15}t \\ z = t \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 16x - 2y - 2z + 15 = 0 \; .$$

Determinare la forma canonica di σ, riconoscere di che quadrica si tratta e scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 0$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -z \end{pmatrix},$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - z') \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione della quadrica nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 16x' - 2\sqrt{2}y' + 15 = 0,$$

ossia

$$4(x')^2 + 2(y')^2 + 16x' - 2\sqrt{2}y' + 15 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 2 \\ Y = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Z = z' \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{2}} + Y^2 = 1.$$

Essa è pertanto un cilindro (ellittico).
Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = X - 2 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - Z) + \frac{1}{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + Z) + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
19 gennaio 2012 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare se i tre vettori sono linearmente indipendenti.

La risposta a questa domanda sarà data nella risposta alla domanda successiva.

b) Determinare la dimensione del sottospazio V di $\mathbb{R}^5$ generato da questi tre vettori.

Il sottospazio V ha dimensione almeno 1 perché contiene il vettore $\underline{u}$ che è non nullo. Inoltre è generato da 3 vettori e quindi ha dimensione al massimo 3. Comunque per determinare la sua dimensione, il metodo più semplice è quello di calcolare la caratteristica (cioè il rango) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & -8 & 1 \\ 5 & 11 & -4 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha la stessa caratteristica della matrice A' ottenuta sottraendo la prima colonna alla seconda e aggiungendo 2 volte la prima colonna all'ultima. Abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -5 \\ 5 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

È immediato osservare che la seconda colonna è uguale alla terza ma che queste due non sono proporzionali alla prima e quindi la matrice A' ha caratteristica 2 così come la matrice A. Il sottospazio V ha quindi dimensione 2 e quindi i vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

c) Dare una base del sottospazio V.

La domanda precedente ha dimostrato che V ha dimensione 2 quindi ogni sua base ha due vettori e ogni coppia di vettori non paralleli di V è una base di V. Basta quindi prendere due qualsiasi dei tre vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $P(1, 2, 0)$ e la retta

$$r : \quad \begin{cases} 2x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ x + 4y + 5 = 0 \end{cases}$$

a) Si scriva l'equazione del piano π_1 contenente P ed r.

Il fascio di piani contenenti r ha equazione $\lambda(2x - 2y + 3z - 5) + \mu(x + 4y + 5) = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P troviamo che $\lambda = 2\mu$, cosicché il piano π_1 ha equazione $5x + 6z - 5 = 0$.

b) Si scriva l'equazione del piano π_2 passante per P e perpendicolare ad r.

La direzione di r è data da $\underline{v}_r = (2, -2, 3) \wedge (1, 4, 0) = (-12, 3, 10)$. L'equazione di π_2 è pertanto $-12(x - 1) + 3(y - 2) + 10(z - 0) = 0$, ossia $-12x + 3y + 10z + 6 = 0$.

c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta s passante per P e perpendicolare ed incidente ad r.

Con un semplice disegno è facile capire che s è l'intersezione dei due piani π_1 e π_2. Per dimostrare rigorosamente questa affermazione basta osservare che:

- il punto P appartiene ad entrambi i piani e quindi alla loro intersezione s;
- la retta r è perpendicolare a π_2, quindi ad ogni retta contenuta in π_2;
- le rette r ed s appartengono entrambe al piano π_1 e sono perpendicolari, quindi sono incidenti.

Le equazioni cartesiane di s sono pertanto

$$s : \quad \begin{cases} 5x + 6z - 5 = 0 \\ -12x + 3y + 10z + 6 = 0 \end{cases}$$

Per ottenere le equazioni parametriche di s basta porre $z = t$ e risolvere rispetto ad x e ad y le due equazioni. Si ottiene

$$s: \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{6}{5}t \\ y = 2 - \frac{122}{15}t \\ z = t \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 8x - 2y - 2z + 3 = 0 \ .$$

Determinare la forma canonica di σ, riconoscere di che quadrica si tratta e scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 0$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -z \end{pmatrix},$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - z') \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione della quadrica nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 - 8x' - 2\sqrt{2}y' + 3 = 0,$$

ossia

$$4(x')^2 + 2(y')^2 - 8x' - 2\sqrt{2}y' + 3 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' - 1 \\ Y = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Z = z' \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{2}} + Y^2 = 1.$$

Essa è pertanto un cilindro (ellittico).
Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - Z) + \frac{1}{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + Z) + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
19 gennaio 2012 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ -11 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare se i tre vettori sono linearmente indipendenti.

La risposta a questa domanda sarà data nella risposta alla domanda successiva.

b) Determinare la dimensione del sottospazio V di $\mathbb{R}^5$ generato da questi tre vettori.

Il sottospazio V ha dimensione almeno 1 perché contiene il vettore $\underline{u}$ che è non nullo. Inoltre è generato da 3 vettori e quindi ha dimensione al massimo 3. Comunque per determinare la sua dimensione, il metodo più semplice è quello di calcolare la caratteristica (cioè il rango) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -1 & -9 & 3 \\ -3 & -11 & 1 \\ 5 & 23 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha la stessa caratteristica della matrice A' ottenuta sottraendo 7 volte la prima colonna alla seconda e aggiungendo 2 volte la prima colonna all'ultima. Abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & 10 & -5 \\ 5 & -12 & 6 \\ 2 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

È immediato osservare che la seconda colonna è -2 volte la terza ma che queste due non sono proporzionali alla prima e quindi la matrice A' ha caratteristica 2 così come la matrice A. Il sottospazio V ha quindi dimensione 2 e quindi i vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

c) Dare una base del sottospazio V.

La domanda precedente ha dimostrato che V ha dimensione 2 quindi ogni sua base ha due vettori e ogni coppia di vettori non paralleli di V è una base di V. Basta quindi prendere due qualsiasi dei tre vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $P(1,-1,0)$ e la retta

$$r: \quad \begin{cases} 2x-2y+3z-5=0 \\ x+4y+5=0 \end{cases}$$

a) Si scriva l'equazione del piano π_1 contenente P ed r.

Il fascio di piani contenenti r ha equazione $\lambda(2x-2y+3z-5)+\mu(x+4y+5)=0$. Imponendo il passaggio per il punto P troviamo che $\lambda = 2\mu$, cosicché il piano π_1 ha equazione $5x+6z-5=0$.

b) Si scriva l'equazione del piano π_2 passante per P e perpendicolare ad r.

La direzione di r è data da $\underline{v}_r = (2,-2,3) \wedge (1,4,0) = (-12,3,10)$. L'equazione di π_2 è pertanto $-12(x-1)+3(y+1)+10(z-0)=0$, ossia $-12x+3y+10z+15=0$.

c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta s passante per P e perpendicolare ed incidente ad r.

Con un semplice disegno è facile capire che s è l'intersezione dei due piani π_1 e π_2. Per dimostrare rigorosamente questa affermazione basta osservare che:

- il punto P appartiene ad entrambi i piani e quindi alla loro intersezione s;
- la retta r è perpendicolare a π_2, quindi ad ogni retta contenuta in π_2;
- le rette r ed s appartengono entrambe al piano π_1 e sono perpendicolari, quindi sono incidenti.

Le equazioni cartesiane di s sono pertanto

$$s: \quad \begin{cases} 5x+6z-5=0 \\ -12x+3y+10z+15=0 \end{cases}$$

Per ottenere le equazioni parametriche di s basta porre $z = t$ e risolvere rispetto ad x e ad y le due equazioni. Si ottiene

$$s: \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{6}{5}t \\ y = -1 - \frac{122}{15}t \\ z = t \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 16x - 2y - 2z + 15 = 0 \ .$$

Determinare la forma canonica di σ, riconoscere di che quadrica si tratta e scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 0$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -z \end{pmatrix} ,$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - z') \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione della quadrica nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 - 16x' - 2\sqrt{2}y' + 15 = 0,$$

ossia

$$4(x')^2 + 2(y')^2 - 16x' - 2\sqrt{2}y' + 15 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' - 2 \\ Y = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Z = z' \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{2}} + Y^2 = 1.$$

Essa è pertanto un cilindro (ellittico).
Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - Z) + \frac{1}{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + Z) + \frac{1}{2} \end{cases}$$