Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
30 agosto 2011 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(1, -2, -1)$ e $B(3, 0, 0)$.

a) Si trovi la retta r passante per A e per B.

Poiché la direzione di r è data da $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 1)$, le equazioni parametriche di r sono

$$r : \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è ortogonale al piano π di equazione $4x + 4y + 2z - 5 = 0$.

Il vettore $\underline{n} = (4, 4, 2)$ è ortogonale al piano e parallelo alla retta r, che quindi è ortogonale a π.

c) Si determini il piano π' passante per B e parallelo a π.

Il piano cercato ha equazione $2(x - 3) + 2y + z = 0$, ossia $2x + 2y + z - 6 = 0$.

d) Si calcoli la distanza tra i piani π e π'.

Tale distanza coincide con la distanza tra B e il piano π; pertanto essa è data da

$$\frac{1}{6}|4x_B + 4y_B + 2z_B - 5| = \frac{7}{6}.$$

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema di tre equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - y - 3z + 3t = 1 \\ -4x + 4y + 5z - 3t = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ -4 & 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La sottomatrice di A costituita dalle due prime righe e dalle seconda e quarta colonna ha determinante 9 (ci conviene selezionare questa sottomatrice perché c'è uno zero e il coefficiente di y nella seconda equazione è -1). Ci sono due orlanti di questa sottomatrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

I loro determinanti sono rispettivamente

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad (R_3 + R_1)$$
$$= 0 \quad \text{perché la prima e l'ultima riga sono uguali.}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad (R_3 + R_1)$$
$$= 0 \quad \text{perché la prima e l'ultima riga sono uguali.}$$

Come al solito la regola di Sarrus non conviene, in questo caso è particolarmente sconveniente.
Dal teorema di Kronecker la matrice A ha caratteristica 2.
Per la matrice completa, ci rimane un solo determinante da calcolare,

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (R_3 + R_1)$$
$$= 0 \quad \text{perché la prima e l'ultima riga sono uguali.}$$

Quindi di nuovo, dal teorema di Kronecker segue che la matrice completa $(A|\underline{b})$ ha caratteristica 2.
Dal teorema di Rouché–Capelli sappiamo che il sistema ammette soluzioni e che queste dipendono da $4-2=2$ parametri (un piano di soluzioni in $\mathbb{R}^4$). La sottomatrice 2×2 di determinante diverso da 0 che abbiamo individuato ci dice che possiamo limitarci a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3y \qquad = 1+2x-2z \\ -y+3t = 1-2x+3z \end{cases}$$

quindi

$$y = \frac{1+2x-2z}{3}$$

e, sommando tre volte la seconda alla prima,

$$9t = 4-4x+7z$$

da cui

$$t = \frac{4-4x+7z}{9}\ .$$

Quindi le soluzioni sono

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ \frac{1+2x-2z}{3} \\ z \\ \frac{4-4x+7z}{9} \end{array} \right) \middle| (x;z) \in \mathbb{R}^2 \right\}\ .$$

Si poteva osservare, svolgendo i conti dei determinanti, che la prima equazione è somma delle due altre. Questo permetteva di evitare tutto lo svolgimento dei determinanti in bella.
Non è l'unico modo possibile di scrivere l'insieme delle soluzioni. Qualsiasi soluzione che dipenda da due parametri e contenga i tre punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

è giusta. **Si devono verificare i conti inserendo (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza.**

Esercizio 3. Determinare la forma canonica e le coordinate (x_V, y_V) del vertice della parabola di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}\,y + 1 = 0.$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\, x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\, y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 + 4y' + 1 = 0$. Si tratta effettivamente di una parabola, la cui forma canonica si ottiene dalla traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - \frac{1}{4} \end{cases}$$

che porta a $y'' = -(x'')^2$.
Il vertice della parabola ha coordinate $x''_V = y''_V = 0$, ossia $x'_V = 0$, $y'_V = -\frac{1}{4}$, ossia

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\, x'_V - y'_V) = \frac{1}{8} \\ y_V = \frac{1}{2}(x'_V + \sqrt{3}\, y'_V) = -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
30 agosto 2011 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(1,1,-1)$ e $B(3,3,0)$.

a) Si trovi la retta r passante per A e per B.

Poiché la direzione di r è data da $\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$, le equazioni parametriche di r sono

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è ortogonale al piano π di equazione $4x + 4y + 2z - 5 = 0$.

Il vettore $\underline{n} = (4,4,2)$ è ortogonale al piano e parallelo alla retta r, che quindi è ortogonale a π.

c) Si determini il piano π' passante per B e parallelo a π.

Il piano cercato ha equazione $2(x-3) + 2(y-3) + z = 0$, ossia $2x + 2y + z - 12 = 0$.

d) Si calcoli la distanza tra i piani π e π'.

Tale distanza coincide con la distanza tra B e il piano π; pertanto essa è data da

$$\frac{1}{6}|4x_B + 4y_B + 2z_B - 5| = \frac{19}{6}.$$

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema di tre equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ 2x - 3y - 2z + 2t = 2 \\ 4x - 5y + 2z + 4t = 2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Una traccia un po' più dettagliata è data nel tema A. In questa versione solo i fatti principali sono indicati. La matrice A e la matrice completa $(A|\underline{b})$ hanno entrambi caratteristica 2. Ci sono quindi soluzioni e dipendono da $4 - 2 = 2$ parametri. Qualsiasi soluzione che dipenda da due parametri e contenga i tre punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è giusta. **Si devono verificare i conti inserendo (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza.**

Esercizio 3. Determinare la forma canonica e le coordinate (x_V, y_V) del vertice della parabola di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 - 4x + 4\sqrt{3}\,y + 4 = 0.$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 + 8y' + 4 = 0$. Si tratta effettivamente di una parabola, la cui forma canonica si ottiene dalla traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - \frac{1}{2} \end{cases}$$

che porta a $y'' = -\frac{1}{2}\,(x'')^2$.
Il vertice della parabola ha coordinate $x''_V = y''_V = 0$, ossia $x'_V = 0$, $y'_V = -\frac{1}{2}$, ossia

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'_V - y'_V) = \frac{1}{4} \\ y_V = \frac{1}{2}(x'_V + \sqrt{3}\,y'_V) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
30 agosto 2011 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(1,-1,-1)$ e $B(3,1,0)$.

a) Si trovi la retta r passante per A e per B.

Poiché la direzione di r è data da $\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$, le equazioni parametriche di r sono

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è ortogonale al piano π di equazione $4x + 4y + 2z - 5 = 0$.

Il vettore $\underline{n} = (4,4,2)$ è ortogonale al piano e parallelo alla retta r, che quindi è ortogonale a π.

c) Si determini il piano π' passante per B e parallelo a π.

Il piano cercato ha equazione $2(x-3) + 2(y-1) + z = 0$, ossia $2x + 2y + z - 8 = 0$.

d) Si calcoli la distanza tra i piani π e π'.

Tale distanza coincide con la distanza tra B e il piano π; pertanto essa è data da

$$\frac{1}{6}|4x_B + 4y_B + 2z_B - 5| = \frac{11}{6}.$$

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema di tre equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} 2x + 4y \ - z \ + 2t = -2 \\ 3x \ + y - 2z \ - 2t = 3 \\ -5x + 5y + 4z + 10t = -13 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Una traccia un po' più dettagliata è data nel tema A. In questa versione solo i fatti principali sono indicati. La matrice A e la matrice completa $(A|\underline{b})$ hanno entrambi caratteristica 2. Ci sono quindi soluzioni e dipendono da $4 - 2 = 2$ parametri. Qualsiasi soluzione che dipenda da due parametri e contenga i tre punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

è giusta. **Si devono verificare i conti inserendo (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza.**

Esercizio 3. Determinare la forma canonica e le coordinate (x_V, y_V) del vertice della parabola di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}\,y + 1 = 0.$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 - 4y' + 1 = 0$. Si tratta effettivamente di una parabola, la cui forma canonica si ottiene dalla traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + \frac{1}{4} \end{cases}$$

che porta a $y'' = (x'')^2$.
Il vertice della parabola ha coordinate $x''_V = y''_V = 0$, ossia $x'_V = 0$, $y'_V = \frac{1}{4}$, ossia

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\, x'_V - y'_V) = -\frac{1}{8} \\ y_V = \frac{1}{2}(x'_V + \sqrt{3}\, y'_V) = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
30 agosto 2011 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(1, 2, -1)$ e $B(3, 4, 0)$.

a) Si trovi la retta r passante per A e per B.

Poiché la direzione di r è data da $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 1)$, le equazioni parametriche di r sono

$$r : \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è ortogonale al piano π di equazione $4x + 4y + 2z - 5 = 0$.

Il vettore $\underline{n} = (4, 4, 2)$ è ortogonale al piano e parallelo alla retta r, che quindi è ortogonale a π.

c) Si determini il piano π' passante per B e parallelo a π.

Il piano cercato ha equazione $2(x - 3) + 2(y - 4) + z = 0$, ossia $2x + 2y + z - 14 = 0$.

d) Si calcoli la distanza tra i piani π e π'.

Tale distanza coincide con la distanza tra B e il piano π; pertanto essa è data da

$$\frac{1}{6}|4x_B + 4y_B + 2z_B - 5| = \frac{23}{6}.$$

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema di tre equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} 2x \;\; + y \;\; - z \;\; + t = 3 \\ -2x \;\; - y \;\; - z + 2t = 2 \\ 8x + 4y - 2z \;\; + t = 7 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e il vettore dei coefficienti noti

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Una traccia un po' più dettagliata è data nel tema A. In questa versione solo i fatti principali sono indicati. La matrice A e la matrice completa $(A|\underline{b})$ hanno entrambi caratteristica 2. Ci sono quindi soluzioni e dipendono da $4 - 2 = 2$ parametri. Qualsiasi soluzione che dipenda da due parametri e contenga i tre punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è giusta. **Si devono verificare i conti inserendo (in brutta) le soluzioni nelle equazioni di partenza.**

Esercizio 3. Determinare la forma canonica e le coordinate (x_V, y_V) del vertice della parabola di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + 4x - 4\sqrt{3}\,y + 4 = 0.$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 - 8y' + 4 = 0$. Si tratta effettivamente di una parabola, la cui forma canonica si ottiene dalla traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + \frac{1}{2} \end{cases}$$

che porta a $y'' = \frac{1}{2}\,(x'')^2$.
Il vertice della parabola ha coordinate $x''_V = y''_V = 0$, ossia $x'_V = 0$, $y'_V = \frac{1}{2}$, ossia

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'_V - y'_V) = -\frac{1}{4} \\ y_V = \frac{1}{2}(x'_V + \sqrt{3}\,y'_V) = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$