Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
30 agosto 2011 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(1,-2,-1)$ e $B(3,0,0)$.

a) Si trovi la retta r passante per A e per B.

Poiché la direzione di r è data da $\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$, le equazioni parametriche di r sono

$$r : \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è ortogonale al piano π di equazione $4x + 4y + 2z - 5 = 0$.

Il vettore $\underline{n} = (4,4,2)$ è ortogonale al piano e parallelo alla retta r, che quindi è ortogonale a π.

c) Si determini il piano π' passante per B e parallelo a π.

Il piano cercato ha equazione $2(x-3) + 2y + z = 0$, ossia $2x + 2y + z - 6 = 0$.

d) Si calcoli la distanza tra i piani π e π'.

Tale distanza coincide con la distanza tra B e il piano π; pertanto essa è data da

$$\frac{1}{6}|4x_B + 4y_B + 2z_B - 5| = \frac{7}{6}.$$

Esercizio 2. Sia

$$\begin{aligned} f_k : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &\longmapsto (a + kb^2 + d - b^2)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \end{aligned}$$

a) Sfruttando il vettore $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$, individuare l'unico valore di k per il quale f_k può essere lineare.

Abbiamo

$$f_k \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = (k-1)x^2 - x - 1$$

e

$$f_k \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\0 \end{pmatrix} = 4(k-1)x^2 - 2x - 2$$

quindi

$$f_k \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\0 \end{pmatrix} = 2f_k \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $k = 1$. Quindi f_k può essere lineare solo se $k = 1$.

b) Per il valore di k di cui sopra, verificare che f_k è lineare.

Abbiamo

$$f_1 \begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \ ,$$

per cui risulta relativamente ovvio che l'applicazione è lineare. Infatti per ogni $\begin{pmatrix} a_1\\b_1\\c_1\\d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_2\\b_2\\c_2\\d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_1\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1\\b_1\\c_1\\d_1 \end{pmatrix}\right) &= f_1 \begin{pmatrix} \lambda a_1\\ \lambda b_1\\ \lambda c_1\\ \lambda d_1 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda a_1 + \lambda d_1)x^2 + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + 4\lambda d_1)x + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + \lambda c_1 + 4\lambda d_1) \\
&= \lambda\big((a_1 + d_1)x^2 + (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1)\big) \\
&= \lambda f_1 \begin{pmatrix} a_1\\b_1\\c_1\\d_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1\left(\begin{pmatrix} a_1\\b_1\\c_1\\d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2\\b_2\\c_2\\d_2 \end{pmatrix}\right) &= f_1 \begin{pmatrix} a_1+a_2\\ b_1+b_2\\ c_1+c_2\\ d_1+d_2 \end{pmatrix} \\
&= (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)x^2 + \\
&\qquad (4(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + 4(d_1 + d_2))x + \\
&\qquad (4(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + 4(d_1 + d_2)) \\
&= (a_1 + d_1)x^2 + (a_2 + d_2)x^2 + \\
&\qquad (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_2 - b_2 + 4d_2)x + \\
&\qquad (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1) + (4a_2 - b_2 + c_2 + d_2) \\
&= f_1 \begin{pmatrix} a_1\\b_1\\c_1\\d_1 \end{pmatrix} + f_1 \begin{pmatrix} a_2\\b_2\\c_2\\d_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Ricordare (senza dimostrazione) quali sono le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}_2[x]$.

Sono rispettivamente di dimensione 4 e 3.

d) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare f_1 nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ e nella base $\{x^2 + 4x + 4; x + 1; 1\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$.

Il modo più semplice di risolvere la questione è di accorgersi che

$$f_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a + d)(x^2 + 4x + 4) - b(x + 1) + c\ .$$

per cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un'altra possibilità è di risolvere il sistema

$$f_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha(x^2 + 4x + 4) + \beta(x + 1) + \gamma\ ,$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha & = a + d \\ 4\alpha + \beta & = 4a - b + 4d \\ 4\alpha + \beta + \gamma & = 4a - b + c + 4d \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha = a + d \\ \beta = -b \\ \gamma = c \end{cases}$$

La matrice è (ovviamente) la stessa.

Esercizio 3. Determinare la forma canonica e le coordinate (x_V, y_V) del vertice della parabola di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}\,y + 1 = 0.$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 + 4y' + 1 = 0$. Si tratta effettivamente di una parabola, la cui forma canonica si ottiene dalla traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - \frac{1}{4} \end{cases}$$

che porta a $y'' = -\,(x'')^2$.
Il vertice della parabola ha coordinate $x''_V = y''_V = 0$, ossia $x'_V = 0$, $y'_V = -\frac{1}{4}$, ossia

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'_V - y'_V) = \frac{1}{8} \\ y_V = \frac{1}{2}(x'_V + \sqrt{3}\,y'_V) = -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia

$$z = \sqrt{3} - i$$

Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di z^6.

Il modulo di z è 2, per cui il modulo di z^6 è $2^6 = 64$. L'argomento di z è l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

ovvero

$$\theta = -\frac{\pi}{6}\ .$$

Di conseguenza z^6 ha argomento $6\theta = -\pi$ oppure $\theta' = \pi$. Di conseguenza, z^6 ha parte reale -64 e parte immaginaria 0, in altre parole $z^6 = -64$.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
30 agosto 2011 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(1, 1, -1)$ e $B(3, 3, 0)$.

a) Si trovi la retta r passante per A e per B.

Poiché la direzione di r è data da $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 1)$, le equazioni parametriche di r sono

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è ortogonale al piano π di equazione $4x + 4y + 2z - 5 = 0$.

Il vettore $\underline{n} = (4, 4, 2)$ è ortogonale al piano e parallelo alla retta r, che quindi è ortogonale a π.

c) Si determini il piano π' passante per B e parallelo a π.

Il piano cercato ha equazione $2(x-3)+2(y-3)+z = 0$, ossia $2x+2y+z-12 = 0$.

d) Si calcoli la distanza tra i piani π e π'.

Tale distanza coincide con la distanza tra B e il piano π; pertanto essa è data da

$$\frac{1}{6}|4x_B + 4y_B + 2z_B - 5| = \frac{19}{6}.$$

Esercizio 2. Sia

$$\begin{aligned} f_k : \ \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &\longmapsto (a + kb^2 + d + b^2)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \end{aligned}$$

a) Sfruttando il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, individuare l'unico valore di k per il quale f_k può essere lineare.

Abbiamo

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (k+1)x^2 - x - 1$$

e

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4(k+1)x^2 - 2x - 2$$

quindi

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $k = -1$. Quindi f_k può essere lineare solo se $k = -1$.

b) Per il valore di k di cui sopra, verificare che f_k è lineare.

Abbiamo

$$f_{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \ ,$$

per cui risulta relativamente ovvio che l'applicazione è lineare. Infatti per ogni $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{-1}\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}\right) &= f_{-1} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \\ \lambda d_1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda a_1 + \lambda d_1)x^2 + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + 4\lambda d_1)x + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + \lambda c_1 + 4\lambda d_1) \\ &= \lambda\big((a_1 + d_1)x^2 + (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1)\big) \\ &= \lambda f_{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{-1}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right) &= f_{-1} \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)x^2 + \\ &\qquad (4(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + 4(d_1 + d_2))x + \\ &\qquad (4(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + 4(d_1 + d_2)) \\ &= (a_1 + d_1)x^2 + (a_2 + d_2)x^2 + \\ &\qquad (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_2 - b_2 + 4d_2)x + \\ &\qquad (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1) + (4a_2 - b_2 + c_2 + d_2) \\ &= f_{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + f_{-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Ricordare (senza dimostrazione) quali sono le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}_2[x]$.

Sono rispettivamente di dimensione 4 e 3.

d) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare f_{-1} nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ e nella base $\{x^2+4x+4; x+1; 1\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$.

Il modo più semplice di risolvere la questione è di accorgersi che

$$f_{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+d)(x^2+4x+4) - b(x+1) + c\ .$$

per cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un'altra possibilità è di risolvere il sistema

$$f_{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha(x^2+4x+4) + \beta(x+1) + \gamma\ ,$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha & = a+d \\ 4\alpha+\beta & = 4a-b+4d \\ 4\alpha+\beta+\gamma & = 4a-b+c+4d \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha = a+d \\ \beta = -b \\ \gamma = c \end{cases}$$

La matrice è (ovviamente) la stessa.

Esercizio 3. Determinare la forma canonica e le coordinate (x_V, y_V) del vertice della parabola di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 - 4x + 4\sqrt{3}\,y + 4 = 0.$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 + 8y' + 4 = 0$. Si tratta effettivamente di una parabola, la cui forma canonica si ottiene dalla traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - \frac{1}{2} \end{cases}$$

che porta a $y'' = -\frac{1}{2}\,(x'')^2$.
Il vertice della parabola ha coordinate $x''_V = y''_V = 0$, ossia $x'_V = 0$, $y'_V = -\frac{1}{2}$, ossia

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'_V - y'_V) = \frac{1}{4} \\ y_V = \frac{1}{2}(x'_V + \sqrt{3}\,y'_V) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia

$$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di z^6.

Il modulo di z è 2, per cui il modulo di z^6 è $2^6 = 64$. L'argomento di z è l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ovvero

$$\theta = \frac{\pi}{4}\ .$$

Di conseguenza z^6 ha argomento $6\theta = \frac{3\pi}{2}$ oppure $\theta' = -\frac{\pi}{2}$. Di conseguenza, z^6 ha parte reale 0 e parte immaginaria -64, in altre parole $z^6 = -64i$.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
30 agosto 2011 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(1,-1,-1)$ e $B(3,1,0)$.

a) Si trovi la retta r passante per A e per B.

Poiché la direzione di r è data da $\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$, le equazioni parametriche di r sono

$$r: \quad \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+2t \\ z = -1+t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è ortogonale al piano π di equazione $4x+4y+2z-5=0$.

Il vettore $\underline{n} = (4,4,2)$ è ortogonale al piano e parallelo alla retta r, che quindi è ortogonale a π.

c) Si determini il piano π' passante per B e parallelo a π.

Il piano cercato ha equazione $2(x-3)+2(y-1)+z=0$, ossia $2x+2y+z-8=0$.

d) Si calcoli la distanza tra i piani π e π'.

Tale distanza coincide con la distanza tra B e il piano π; pertanto essa è data da

$$\frac{1}{6}|4x_B+4y_B+2z_B-5| = \frac{11}{6}.$$

Esercizio 2. Sia

$$\begin{aligned} f_k: \ \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ \begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix} &\longmapsto (a+kb^2+d-2b^2)x^2+(4a-b+4d)x+(4a-b+c+4d) \end{aligned}$$

a) Sfruttando il vettore $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$, individuare l'unico valore di k per il quale f_k può essere lineare.

Abbiamo

$$f_k \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = (k-2)x^2 - x - 1$$

e

$$f_k \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\0 \end{pmatrix} = 4(k-2)x^2 - 2x - 2$$

quindi

$$f_k \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\0 \end{pmatrix} = 2 f_k \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $k = 2$. Quindi f_k può essere lineare solo se $k = 2$.

b) Per il valore di k di cui sopra, verificare che f_k è lineare.

Abbiamo

$$f_2 \begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \ ,$$

per cui risulta relativamente ovvio che l'applicazione è lineare. Infatti per ogni $\begin{pmatrix} a_1\\b_1\\c_1\\d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_2\\b_2\\c_2\\d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_2\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1\\b_1\\c_1\\d_1 \end{pmatrix}\right) &= f_2 \begin{pmatrix} \lambda a_1\\ \lambda b_1\\ \lambda c_1\\ \lambda d_1 \end{pmatrix}\\
&= (\lambda a_1 + \lambda d_1)x^2 + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + 4\lambda d_1)x + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + \lambda c_1 + 4\lambda d_1)\\
&= \lambda\big((a_1 + d_1)x^2 + (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1)\big)\\
&= \lambda f_2 \begin{pmatrix} a_1\\b_1\\c_1\\d_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2\left(\begin{pmatrix} a_1\\b_1\\c_1\\d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2\\b_2\\c_2\\d_2 \end{pmatrix}\right) &= f_2 \begin{pmatrix} a_1+a_2\\ b_1+b_2\\ c_1+c_2\\ d_1+d_2 \end{pmatrix}\\
&= (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)x^2 +\\
&\qquad (4(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + 4(d_1+d_2))x +\\
&\qquad (4(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + (c_1+c_2) + 4(d_1+d_2))\\
&= (a_1+d_1)x^2 + (a_2+d_2)x^2 +\\
&\qquad (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_2 - b_2 + 4d_2)x +\\
&\qquad (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1) + (4a_2 - b_2 + c_2 + d_2)\\
&= f_2 \begin{pmatrix} a_1\\b_1\\c_1\\d_1 \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} a_2\\b_2\\c_2\\d_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Ricordare (senza dimostrazione) quali sono le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}_2[x]$.

Sono rispettivamente di dimensione 4 e 3.

d) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare f_2 nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ e nella base $\{x^2 + 4x + 4; x + 1; 1\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$.

Il modo più semplice di risolvere la questione è di accorgersi che

$$f_2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a + d)(x^2 + 4x + 4) - b(x + 1) + c\ .$$

per cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un'altra possibilità è di risolvere il sistema

$$f_2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha(x^2 + 4x + 4) + \beta(x + 1) + \gamma\ ,$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha & = a + d \\ 4\alpha + \beta & = 4a - b + 4d \\ 4\alpha + \beta + \gamma & = 4a - b + c + 4d \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha = a + d \\ \beta = -b \\ \gamma = c \end{cases}$$

La matrice è (ovviamente) la stessa.

Esercizio 3. Determinare la forma canonica e le coordinate (x_V, y_V) del vertice della parabola di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}\,y + 1 = 0.$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 - 4y' + 1 = 0$. Si tratta effettivamente di una parabola, la cui forma canonica si ottiene dalla traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + \frac{1}{4} \end{cases}$$

che porta a $y'' = (x'')^2$.
Il vertice della parabola ha coordinate $x''_V = y''_V = 0$, ossia $x'_V = 0$, $y'_V = \frac{1}{4}$, ossia

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'_V - y'_V) = -\frac{1}{8} \\ y_V = \frac{1}{2}(x'_V + \sqrt{3}\,y'_V) = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia

$$z = -1 + \sqrt{3}i$$

Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di z^6.

Il modulo di z è 2, per cui il modulo di z^6 è $2^6 = 64$. L'argomento di z è l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ovvero

$$\theta = \frac{2\pi}{3}\ .$$

Di conseguenza z^6 ha argomento $6\theta = 4\pi$ oppure $\theta' = 0$. Di conseguenza, z^6 ha parte reale 64 e parte immaginaria 0, in altre parole $z^6 = 64$.

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (vecchio programma) —
30 agosto 2011 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino i punti $A(1, 2, -1)$ e $B(3, 4, 0)$.

a) Si trovi la retta r passante per A e per B.

Poiché la direzione di r è data da $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 1)$, le equazioni parametriche di r sono

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è ortogonale al piano π di equazione $4x + 4y + 2z - 5 = 0$.

Il vettore $\underline{n} = (4, 4, 2)$ è ortogonale al piano e parallelo alla retta r, che quindi è ortogonale a π.

c) Si determini il piano π' passante per B e parallelo a π.

Il piano cercato ha equazione $2(x-3)+2(y-4)+z = 0$, ossia $2x+2y+z-14 = 0$.

d) Si calcoli la distanza tra i piani π e π'.

Tale distanza coincide con la distanza tra B e il piano π; pertanto essa è data da

$$\frac{1}{6}|4x_B + 4y_B + 2z_B - 5| = \frac{23}{6}.$$

Esercizio 2. Sia

$$\begin{aligned} f_k : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &\longmapsto (a + kb^2 + d + 2b^2)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \end{aligned}$$

a) Sfruttando il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, individuare l'unico valore di k per il quale f_k può essere lineare.

Abbiamo

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (k+2)x^2 - x - 1$$

e

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4(k+2)x^2 - 2x - 2$$

quindi

$$f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $k = -2$. Quindi f_k può essere lineare solo se $k = -2$.

b) Per il valore di k di cui sopra, verificare che f_k è lineare.

Abbiamo

$$f_{-2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (4a - b + 4d)x + (4a - b + c + 4d) \ ,$$

per cui risulta relativamente ovvio che l'applicazione è lineare. Infatti per ogni $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_{-2}\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}\right) &= f_{-2} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \\ \lambda d_1 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda a_1 + \lambda d_1)x^2 + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + 4\lambda d_1)x + (4\lambda a_1 - \lambda b_1 + \lambda c_1 + 4\lambda d_1) \\
&= \lambda\big((a_1 + d_1)x^2 + (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1)\big) \\
&= \lambda f_{-2} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{-2}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right) &= f_{-2} \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix} \\
&= (a_1 + a_2 + d_1 + d_2)x^2 + \\
&\qquad (4(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + 4(d_1 + d_2))x + \\
&\qquad (4(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + 4(d_1 + d_2)) \\
&= (a_1 + d_1)x^2 + (a_2 + d_2)x^2 + \\
&\qquad (4a_1 - b_1 + 4d_1)x + (4a_2 - b_2 + 4d_2)x + \\
&\qquad (4a_1 - b_1 + c_1 + 4d_1) + (4a_2 - b_2 + c_2 + d_2) \\
&= f_{-2} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + f_{-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Ricordare (senza dimostrazione) quali sono le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}_2[x]$.

Sono rispettivamente di dimensione 4 e 3.

d) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare f_{-2} nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ e nella base $\{x^2+4x+4; x+1; 1\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$.

Il modo più semplice di risolvere la questione è di accorgersi che

$$f_{-2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a+d)(x^2+4x+4) - b(x+1) + c\ .$$

per cui la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un'altra possibilità è di risolvere il sistema

$$f_{-2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha(x^2+4x+4) + \beta(x+1) + \gamma\ ,$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha & = a+d \\ 4\alpha+\beta & = 4a-b+4d \\ 4\alpha+\beta+\gamma & = 4a-b+c+4d \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha = a+d \\ \beta = -b \\ \gamma = c \end{cases}$$

La matrice è (ovviamente) la stessa.

Esercizio 3. Determinare la forma canonica e le coordinate (x_V, y_V) del vertice della parabola di equazione

$$3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + 4x - 4\sqrt{3}\,y + 4 = 0.$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}\,y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $4(x')^2 - 8y' + 4 = 0$. Si tratta effettivamente di una parabola, la cui forma canonica si ottiene dalla traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + \frac{1}{2} \end{cases}$$

che porta a $y'' = \frac{1}{2}\,(x'')^2$.
Il vertice della parabola ha coordinate $x''_V = y''_V = 0$, ossia $x'_V = 0$, $y'_V = \frac{1}{2}$, ossia

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'_V - y'_V) = -\frac{1}{4} \\ y_V = \frac{1}{2}(x'_V + \sqrt{3}\,y'_V) = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di z^6.

Il modulo di z è 2, per cui il modulo di z^6 è $2^6 = 64$. L'argomento di z è l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ovvero

$$\theta = \frac{3\pi}{4}\ .$$

Di conseguenza z^6 ha argomento $6\theta = \frac{9\pi}{2}$ oppure $\theta' = \frac{\pi}{2}$. Di conseguenza, z^6 ha parte reale 0 e parte immaginaria 64, in altre parole $z^6 = 64i$.