Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
8 luglio 2011 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Dimostrare che sono linearmente indipendenti.

Possiamo determinare se i tre vettori sono linearmente indipendenti calcolando la caratteristica (o rango) della matrice A dei coefficienti dei vettori. Abbiamo quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è 6 per cui la matrice A ha caratteristica almeno 2. Il determinante della sottomatrice costituita dalle tre prime righe è nullo[2] (per esempio perché la seconda e la terza riga sono opposte una all'altra) mentre il determinante della matrice costituita dalla prima, seconda e quarta riga è

$$\det A' = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 15$$

Segue che i tre vettori sono linearmente indipendenti.

[2] questo fatto risulta vero per i quattro temi

b) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $\underline{w} = (1, k, 2, k)_T$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Il quarto vettore è combinazione lineare dei tre primi se e solo se la matrice $(A|\underline{w})$ non ha caratteristica 4. Infatti se la matrice ha caratteristica minore di 4 è al massimo 3 e allora i tre vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ costituiscono una base dello spazio generato dai quattro vettori e quindi $\underline{w}$ è combinazione lineare di questi; se invece $\underline{w}$ è combinazione dei vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ la caratteristica di $(A|\underline{w})$ non può essere 4.

Ci basta quindi calcolare il determinante di tale matrice (perché è quadrata).

$$\begin{aligned}
\det(A|\underline{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} \\
&= (k+2) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (k+2) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -15(k+2)
\end{aligned}$$

Quindi la matrice $(A|\underline{w})$ ha caratteristica 4 per ogni valore di k tranne per $k = -2$. Il vettore $\underline{w}$ è quindi combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ se e solo se $k = -2$.

Esercizio 2.

a) Determinare per quale valore o quali valori di a il seguente sistema ammette almeno una soluzione.

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ 2x - 3y - 7z = 7 \\ x + 2y - 6z = 5 \\ x + ay + z = 3 \end{cases}$$

Dal teorema di Rouché–Capelli, il sistema ha soluzioni se e solo se la matrice A dei coefficienti ha la stessa caratteristica (cioè lo stesso rango) della matrice detta completa $(A|\underline{b})$ dove $\underline{b}$ è il vettore dei termini noti.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & -6 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (o rango) della matrice A. La matrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante -1 per cui A ha caratteristica almeno 2. Consideriamo la sottomatrice costituita dalle 3 prime righe

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

allora

$$
\begin{aligned}
\det A' &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ (R_3 - R_1) \end{matrix} \\
&= 1 \; .
\end{aligned}
$$

Segue che A ha caratteristica almeno 3. Siccome A ha 3 colonne non può avere caratteristica maggiore di 3 e quindi ha caratteristica 3.

Per inciso questo significa che se il sistema ammette soluzione, questa è unica ed è determinata dalle 3 prime equazioni.

A questo punto possiamo dedurre dal teorema di Rouché–Capelli che il sistema ammette soluzione se e solo se la matrice completa ha determinante 0. Infatti, la matrice completa non può avere caratteristica minore di 3 (perché contiene la matrice A che ha caratteristica 3) e, se il suo determinante è 0 non può avere caratteristica 4. Al contrario se ha determinante diverso da 0, ha caratteristica 4.

$$
\begin{aligned}
\det(A|\underline{b}) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & -7 & 7 \\ 1 & 2 & -6 & 5 \\ 1 & a & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & a+2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ (R_3 - R_1) \\ (R_4 - R_1) \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ a+2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a+2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ \\ \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a+10 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ (R_3 + 4R_1) \end{matrix} \\
&= a + 10 \; .
\end{aligned}
$$

Quindi il sistema avrà soluzione se e solo se $a + 10 = 0$, cioè se e solo se $a = -10$.

b) Risolvere il precedente sistema quando è possibile.

Basta risolvere il sistema costituito dalle 3 prime righe (per $a = -10$). Si trova $x = -5$, $y = -1$ e $z = -2$. **Non dimenticare di inserire (in brutta) i valori trovati nelle tre prime equazioni per verificare che il risultato trovato è corretto.**

In questo caso il metodo di Gauss era senz'altro il più veloce.

Nel caso di questo esercizio si poteva procedere nel modo seguente: le tre prime equazioni determinavano un un'unica possibile soluzione (che risultava semplice da calcolare utilizzando il metodo di Gauss). Introducendo tale soluzione nella quarta equazione, si determinava la condizione necessaria e sufficiente affinché ci sia una soluzione.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$11x^2 + 4y^2 - 5z^2 - 24xy + 6xz + 8yz - 9x - 12y - 15z = 0 \ .$$

a) Dimostrare che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 3 \\ -12 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = -10$ e $\lambda_3 = 0$.

Nel prossimo punto calcoleremo gli autovettori di B e quindi mostreremo (in base alla definizione) che λ_1, λ_2 e λ_3 sono effettivamente gli autovalori.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 20$ sono dati dalle soluzioni (non nulle) del sistema

$$\begin{cases} -9x - 12y + 3z = 0 \\ -12x - 16y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - 25z = 0 \end{cases}$$

che sono $z = 0$ e $y = -\frac{3}{4}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_1 = 20$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione infine porta al versore $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$.

Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = -10$, essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 21x - 12y + 3z = 0 \\ -12x + 14y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = -\frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_2 = -10$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione porta poi al versore $\underline{v}_2 = (-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Infine, gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_3 = 0$ si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 11x - 12y + 3z = 0 \\ -12x + 4y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = \frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_3 = 0$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione infine porta al versore $\underline{v}_3 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X - \frac{3}{5\sqrt{2}}Y + \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X - \frac{4}{5\sqrt{2}}Y + \frac{4}{5\sqrt{2}}Z = -\frac{3}{5}X - \frac{2\sqrt{2}}{5}Y + \frac{2\sqrt{2}}{5}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della quadrica diventa

$$20X^2 - 10Y^2 - 15\sqrt{2}\,Z = 0 \ ;$$

ossia

$$4X^2 - 2Y^2 - 3\sqrt{2}\,Z = 0 \ ;$$

Si tratta pertanto di un paraboloide iperbolico, la cui forma canonica è

$$Z = \frac{X^2}{\frac{3}{2\sqrt{2}}} - \frac{Y^2}{\frac{3}{\sqrt{2}}} \ .$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
8 luglio 2011 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Dimostrare che sono linearmente indipendenti.

Guardare la soluzione dell'esercizio corrispondente sul tema A.

b) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $\underline{w} = (1, k, 2, k)_T$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Guardare la soluzione dell'esercizio corrispondente sul tema A.

Esercizio 2.

a) Determinare per quale valore o quali valori di a il seguente sistema ammette almeno una soluzione.

$$\begin{cases} x + y - z &= 3 \\ 2x + 3y - 3z &= 7 \\ x + 5y - 4z &= 5 \\ x + ay + 3z &= 3 \end{cases}$$

Dal teorema di Rouché–Capelli, il sistema ha soluzioni se e solo se la matrice A dei coefficienti ha la stessa caratteristica (cioè lo stesso rango) della matrice detta completa $(A|\underline{b})$ dove $\underline{b}$ è il vettore dei termini noti.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & -4 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (o rango) della matrice A. La matrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante -1 per cui A ha caratteristica almeno 2. Consideriamo la sottomatrice costituita dalle 3 prime righe

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{aligned} \det A' &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ (R_3 - R_1) \end{matrix} \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

Segue che A ha caratteristica almeno 3. Siccome A ha 3 colonne non può avere caratteristica maggiore di 3 e quindi ha caratteristica 3.

Per inciso questo significa che se il sistema ammette soluzione, questa è unica ed è determinata dalle 3 prime equazioni.

A questo punto possiamo dedurre dal teorema di Rouché–Capelli che il sistema ammette soluzione se e solo se la matrice completa ha determinante 0. Infatti, la matrice completa non può avere caratteristica minore di 3 (perché contiene la matrice A che ha caratteristica 3) e, se il suo determinante è 0 non può avere caratteristica 4. Al contrario se ha determinante diverso da 0, ha caratteristica 4.

$$\begin{aligned} \det(A|\underline{b}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & -4 & 5 \\ 1 & a & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & a-1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ (R_3 - R_1) \\ (R_4 - R_1) \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ a-1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a-1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ \\ \end{matrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a+7 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (R_3 + 4R_1) \\
&= a+7 \ .
\end{aligned}
$$

Quindi il sistema avrà soluzione se e solo se $a + 7 = 0$, cioè se e solo se $a = -7$.

b) Risolvere il precedente sistema quando è possibile.

Basta risolvere il sistema costituito dalle 3 prime righe (per $a = -7$). Si trova $x = 2$, $y = -1$ e $z = -2$. **Non dimenticare di inserire (in brutta) i valori trovati nelle tre prime equazioni per verificare che il risultato trovato è corretto.**

In questo caso il metodo di Gauss era senz'altro il più veloce.

Nel caso di questo esercizio si poteva procedere nel modo seguente: le tre prime equazioni determinavano un un'unica possibile soluzione (che risultava semplice da calcolare utilizzando il metodo di Gauss). Introducendo tale soluzione nella quarta equazione, si determinava la condizione necessaria e sufficiente affinché ci sia una soluzione.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$11x^2 + 4y^2 - 5z^2 - 24xy + 6xz + 8yz - 3x - 4y - 5z = 0 \ .$$

a) Dimostrare che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 3 \\ -12 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = -10$ e $\lambda_3 = 0$.

Nel prossimo punto calcoleremo gli autovettori di B e quindi mostreremo (in base alla definizione) che λ_1, λ_2 e λ_3 sono effettivamente gli autovalori.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 20$ sono dati dalle soluzioni (non nulle) del sistema

$$\begin{cases} -9x - 12y + 3z = 0 \\ -12x - 16y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - 25z = 0 \end{cases}$$

che sono $z = 0$ e $y = -\frac{3}{4}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_1 = 20$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione infine porta al versore $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$.

Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = -10$, essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 21x - 12y + 3z = 0 \\ -12x + 14y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = -\frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_2 = -10$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione porta poi al versore $\underline{v}_2 = (-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.
Infine, gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_3 = 0$ si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 11x - 12y + 3z = 0 \\ -12x + 4y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = \frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_3 = 0$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione infine porta al versore $\underline{v}_3 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.
Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X - \frac{3}{5\sqrt{2}}Y + \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X - \frac{4}{5\sqrt{2}}Y + \frac{4}{5\sqrt{2}}Z = -\frac{3}{5}X - \frac{2\sqrt{2}}{5}Y + \frac{2\sqrt{2}}{5}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della quadrica diventa

$$20X^2 - 10Y^2 - 5\sqrt{2}\,Z = 0 \; ;$$

ossia

$$4X^2 - 2Y^2 - \sqrt{2}\,Z = 0 \; ;$$

Si tratta pertanto di un paraboloide iperbolico, la cui forma canonica è

$$Z = \frac{X^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \; .$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
8 luglio 2011 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Dimostrare che sono linearmente indipendenti.

Guardare la soluzione dell'esercizio corrispondente sul tema A.

b) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $\underline{w} = (1, k, 2, k)_T$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Guardare la soluzione dell'esercizio corrispondente sul tema A.

Esercizio 2.

a) Determinare per quale valore o quali valori di a il seguente sistema ammette almeno una soluzione.

$$\begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 7 \\ x + 3y - 2z &= 5 \\ x + ay + 5z &= 3 \end{cases}$$

Dal teorema di Rouché–Capelli, il sistema ha soluzioni se e solo se la matrice A dei coefficienti ha la stessa caratteristica (cioè lo stesso rango) della matrice detta completa $(A|\underline{b})$ dove $\underline{b}$ è il vettore dei termini noti.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (o rango) della matrice A. La matrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante -1 per cui A ha caratteristica almeno 2. Consideriamo la sottomatrice costituita dalle 3 prime righe

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{aligned} \det A' &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ (R_3 - R_1) \end{matrix} \\ &= 1 \; . \end{aligned}$$

Segue che A ha caratteristica almeno 3. Siccome A ha 3 colonne non può avere caratteristica maggiore di 3 e quindi ha caratteristica 3.

Per inciso questo significa che se il sistema ammette soluzione, questa è unica ed è determinata dalle 3 prime equazioni.

A questo punto possiamo dedurre dal teorema di Rouché–Capelli che il sistema ammette soluzione se e solo se la matrice completa ha determinante 0. Infatti, la matrice completa non può avere caratteristica minore di 3 (perché contiene la matrice A che ha caratteristica 3) e, se il suo determinante è 0 non può avere caratteristica 4. Al contrario se ha determinante diverso da 0, ha caratteristica 4.

$$\begin{aligned} \det(A|\underline{b}) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & a & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ (R_3 - R_1) \\ (R_4 - R_1) \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ a+1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a+1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ \\ \end{matrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a+9 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (R_3 + 4R_1) \\
&= a + 9 \; .
\end{aligned}
$$

Quindi il sistema avrà soluzione se e solo se $a + 9 = 0$, cioè se e solo se $a = -9$.

b) Risolvere il precedente sistema quando è possibile.

Basta risolvere il sistema costituito dalle 3 prime righe (per $a = -9$). Si trova $x = 4$, $y = -1$ e $z = -2$. **Non dimenticare di inserire (in brutta) i valori trovati nelle tre prime equazioni per verificare che il risultato trovato è corretto.**

In questo caso il metodo di Gauss era senz'altro il più veloce.

Nel caso di questo esercizio si poteva procedere nel modo seguente: le tre prime equazioni determinavano un un'unica possibile soluzione (che risultava semplice da calcolare utilizzando il metodo di Gauss). Introducendo tale soluzione nella quarta equazione, si determinava la condizione necessaria e sufficiente affinché ci sia una soluzione.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$11x^2 + 4y^2 - 5z^2 - 24xy + 6xz + 8yz - 12x - 16y - 20z = 0 \; .$$

a) Dimostrare che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 3 \\ -12 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = -10$ e $\lambda_3 = 0$.

Nel prossimo punto calcoleremo gli autovettori di B e quindi mostreremo (in base alla definizione) che λ_1, λ_2 e λ_3 sono effettivamente gli autovalori.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 20$ sono dati dalle soluzioni (non nulle) del sistema

$$\begin{cases} -9x - 12y + 3z = 0 \\ -12x - 16y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - 25z = 0 \end{cases}$$

che sono $z = 0$ e $y = -\frac{3}{4}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_1 = 20$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione infine porta al versore $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$.

Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = -10$, essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 21x - 12y + 3z = 0 \\ -12x + 14y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = -\frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_2 = -10$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione porta poi al versore $\underline{v}_2 = (-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Infine, gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_3 = 0$ si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 11x - 12y + 3z = 0 \\ -12x + 4y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = \frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_3 = 0$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione infine porta al versore $\underline{v}_3 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.

Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X - \frac{3}{5\sqrt{2}}Y + \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X - \frac{4}{5\sqrt{2}}Y + \frac{4}{5\sqrt{2}}Z = -\frac{3}{5}X - \frac{2\sqrt{2}}{5}Y + \frac{2\sqrt{2}}{5}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della quadrica diventa

$$20X^2 - 10Y^2 - 20\sqrt{2}\,Z = 0 \;;$$

ossia

$$2X^2 - Y^2 - 2\sqrt{2}\,Z = 0 \;;$$

Si tratta pertanto di un paraboloide iperbolico, la cui forma canonica è

$$Z = \frac{X^2}{\sqrt{2}} - \frac{Y^2}{2\sqrt{2}} \;.$$

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
8 luglio 2011 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Dimostrare che sono linearmente indipendenti.

Guardare la soluzione dell'esercizio corrispondente sul tema A.

b) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $\underline{w} = (1, k, 2, k)_T$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Guardare la soluzione dell'esercizio corrispondente sul tema A.

Esercizio 2.

a) Determinare per quale valore o quali valori di a il seguente sistema ammette almeno una soluzione.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z &= 3 \\ 2x + 5y - 5z &= 7 \\ x + 6y - 5z &= 5 \\ x + ay + 2z &= 3 \end{cases}$$

Dal teorema di Rouché–Capelli, il sistema ha soluzioni se e solo se la matrice A dei coefficienti ha la stessa caratteristica (cioè lo stesso rango) della matrice detta completa $(A|\underline{b})$ dove $\underline{b}$ è il vettore dei termini noti.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la caratteristica (o rango) della matrice A. La matrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante -1 per cui A ha caratteristica almeno 2. Consideriamo la sottomatrice costituita dalle 3 prime righe

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{aligned} \det A' &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 6 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ (R_3 - R_1) \end{matrix} \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

Segue che A ha caratteristica almeno 3. Siccome A ha 3 colonne non può avere caratteristica maggiore di 3 e quindi ha caratteristica 3.

Per inciso questo significa che se il sistema ammette soluzione, questa è unica ed è determinata dalle 3 prime equazioni.

A questo punto possiamo dedurre dal teorema di Rouché–Capelli che il sistema ammette soluzione se e solo se la matrice completa ha determinante 0. Infatti, la matrice completa non può avere caratteristica minore di 3 (perché contiene la matrice A che ha caratteristica 3) e, se il suo determinante è 0 non può avere caratteristica 4. Al contrario se ha determinante diverso da 0, ha caratteristica 4.

$$\begin{aligned} \det(A|\underline{b}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 7 \\ 1 & 6 & -5 & 5 \\ 1 & a & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & a-2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (R_2 - 2R_1) \\ (R_3 - R_1) \\ (R_4 - R_1) \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ a-2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a-2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad (R_2 - 2R_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a+6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (R_3 + 4R_1) \\
&= a + 6 \ .
\end{aligned}
$$

Quindi il sistema avrà soluzione se e solo se $a + 6 = 0$, cioè se e solo se $a = -6$.

b) Risolvere il precedente sistema quando è possibile.

Basta risolvere il sistema costituito dalle 3 prime righe (per $a = -6$). Si trova $x = 1$, $y = -1$ e $z = -2$. **Non dimenticare di inserire (in brutta) i valori trovati nelle tre prime equazioni per verificare che il risultato trovato è corretto.**

In questo caso il metodo di Gauss era senz'altro il più veloce.

Nel caso di questo esercizio si poteva procedere nel modo seguente: le tre prime equazioni determinavano un un'unica possibile soluzione (che risultava semplice da calcolare utilizzando il metodo di Gauss). Introducendo tale soluzione nella quarta equazione, si determinava la condizione necessaria e sufficiente affinché ci sia una soluzione.

Esercizio 3. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$11x^2 + 4y^2 - 5z^2 - 24xy + 6xz + 8yz - 6x - 8y - 10z = 0 \ .$$

a) Dimostrare che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 3 \\ -12 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = -10$ e $\lambda_3 = 0$.

Nel prossimo punto calcoleremo gli autovettori di B e quindi mostreremo (in base alla definizione) che λ_1, λ_2 e λ_3 sono effettivamente gli autovalori.

b) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

Dobbiamo determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 20$ sono dati dalle soluzioni (non nulle) del sistema

$$\begin{cases} -9x - 12y + 3z = 0 \\ -12x - 16y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - 25z = 0 \end{cases}$$

che sono $z = 0$ e $y = -\frac{3}{4}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_1 = 20$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione infine porta al versore $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$.

Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = -10$, essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 21x - 12y + 3z = 0 \\ -12x + 14y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = -\frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_2 = -10$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione porta poi al versore $\underline{v}_2 = (-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.
Infine, gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_3 = 0$ si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 11x - 12y + 3z = 0 \\ -12x + 4y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

Si trova $y = \frac{4}{3}x$ e $z = \frac{5}{3}x$, con x arbitrario (non nullo). Ciò dimostra che $\lambda_3 = 0$ è effettivamente un autovalore della matrice B. La normalizzazione infine porta al versore $\underline{v}_3 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$.
Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X - \frac{3}{5\sqrt{2}}Y + \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X - \frac{4}{5\sqrt{2}}Y + \frac{4}{5\sqrt{2}}Z = -\frac{3}{5}X - \frac{2\sqrt{2}}{5}Y + \frac{2\sqrt{2}}{5}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della quadrica diventa

$$20X^2 - 10Y^2 - 10\sqrt{2}\,Z = 0\ ;$$

ossia

$$2X^2 - Y^2 - \sqrt{2}\,Z = 0\ ;$$

Si tratta pertanto di un paraboloide iperbolico, la cui forma canonica è

$$Z = \frac{X^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{Y^2}{\sqrt{2}}\ .$$