Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
24 giugno 2011 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Siano

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ -1 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ a \\ -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

dove a e b sono dei parametri reali.

a) Determinare, se esistono, i valori dei parametri a e b tali che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ risultino linearmente indipendenti.

Per determinare se i 4 vettori sono linearmente indipendenti, basta calcolare la caratteristica della matrice costituita dalle coordinate dei quattro vettori ovvero della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 8 \\ -2 & a & -1 & a \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ -3 & b & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il procedimento di Kronecker. Il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0 quindi la matrice M ha caratteristica almeno 1. La sottomatrice costituita dalla prima e terza riga e prima e terza colonna, ovvero

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinante 2 per cui la matrice M ha caratteristica almeno 2. La sottomatrice costituita dalla prima, terza e quinta riga e dalle tre prime colonne, overro

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante

$$\begin{aligned} \det M_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{usando la prima colonna per semplificare la prima riga} \\ &= \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 15 \end{aligned}$$

per cui la matrice M ha caratteristica almeno 3.

Consideriamo quindi il determinante della matrice costituita da tutte le righe di A tranne la quarta, cioè

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 8 \\ -2 & a & -1 & a \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già una strategia per semplificare il determinante:

$$\begin{aligned} \det M_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 8 \\ -2 & a & -1 & a \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & a+8 & 1 & a+16 \\ 1 & -5 & 2 & -12 \\ 2 & -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+8 & 1 & a+16 \\ -5 & 2 & -12 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 0 & a+7 \\ -15 & 0 & -30 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+3 & a+7 \\ -15 & -30 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} a+3 & a+7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -15(2a+6-a-7) \\ &= -15(a-1) \end{aligned}$$

Quindi per $a \neq 1$ la matrice M_4 ha determinante diverso da 0 e quindi M_4 e M hanno caratteristica 4.

Se invece $a = 1$, dobbiamo studiare il determinante della matrice

$$M_4' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ -3 & b & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\det M_4' = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ -3 & b & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -12 \\ -3 & b+12 & 1 & 23 \\ 2 & -5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -5 & 2 & -12 \\ b+12 & 1 & 23 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -15 & 0 & -30 \\ b+7 & 0 & 14 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= -15 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ b+7 & 14 \end{vmatrix} = 30b$$

Quindi per $b \neq 0$ la matrice M_4' e quindi la matrice M hanno caratteristica 4.

In totale per $a = 1$ e $b = 0$ la matrice M ha caratteristica 3 e quindi i vettori $\underline{v}_1$ a $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Per tutti gli altri valori la matrice M ha caratteristica 4 e quindi codesti vettori sono linearmente indipendenti.

b) Determinare al variare dei parametri la dimensione del sottospazio V generato dai vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$.

È esattamente quanto abbiamo fatto prima: la dimensione del sottospazio V è la caratteristica di M, quindi è 4 sempre tranne quando $a = 1$ e $b = 0$ caso in cui la $\dim V = 3$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(1, 0, 2)$ e il piano π di equazione $x - 3y - 2z + 4 = 0$.

a) Si trovi la retta r perpendicolare a π e passante per A.

La direzione di r è data da $\underline{v}_r = \underline{n}_\pi$, dove $\underline{n}_\pi = (1, -3, -2)$ è un vettore normale a π. Pertanto le equazioni parametriche di r sono

$$r : \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è parallela alla retta

$$s : \quad \begin{cases} 2x + z - 5 = 0 \\ -3x + y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

La direzione di s è data da $\underline{v}_s = \underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (2, 0, 1)$ e $\underline{n}_2 = (-3, 1, -3)$ sono i vettori normali ai piani che compaiono nelle equazioni cartesiane di s. Si trova che $\underline{v}_s = (-1, 3, 2) = -\underline{v}_r$ e quindi r ed s sono parallele.

c) Si determini il piano contenente r ed s.

Il piano cercato è quello contenente s e passante per A. Consideriamo quindi il fascio dei piani contenenti s, ossia

$$\lambda(2x + z - 5) + \mu(-3x + y - 3z + 3) = 0,$$

e imponiamo il passaggio per $A(1, 0, 2)$. Otteniamo $\lambda = -6\mu$ e quindi l'equazione del piano cercato è $15x - y + 9z - 33 = 0$.

d) Si calcoli la distanza $\overline{AB}$, dove B è il punto d'intersezione tra π e r.

Non c'è bisogno di calcolare le coordinate del punto B, poiché la distanza tra A e B coincide con la distanza tra A e il piano π; pertanto essa è data da

$$\overline{AB} = \frac{|x_A - 3y_A - 2z_A + 4|}{\sqrt{(-3)^2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \ .$$

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ a & a & -a \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

dove a è un parametro reale.

a) Verificare che 1 è un autovalore di A.

Abbiamo

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ a & a-1 & -a \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che la prima e la terza riga sono uguali per cui il determinante di $A - I_3$ è 0. Da questo deduciamo che 1 è autovalore di A.

b) Determinare il polinomio caratteristico di A e fattorizzarlo.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ a & a-\lambda & -a \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

quindi il polinomio caratteristico di A è

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ a & a-\lambda & -a \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ a & a-\lambda & -a \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad (C_3 - C_1) \\
&= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ a & a-\lambda & -a \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & a-\lambda & -a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ sommando la terza colonna alla prima} \\
&= (1-\lambda)(a-\lambda)(4-\lambda)\ .
\end{aligned}
$$

c) Determinare per quali valori del parametro a la matrice A è diagonalizzabile.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = a$. Se a è diverso da 1 e 4 allora la matrice A è automaticamente diagonalizzabile perché i suoi autovalori sono semplici.

Per $a = 1$, l'autovalore 4 è semplice (quindi regolare) e l'autovalore 1 è doppio. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice 2×2 in alto a sinistra è di determinante $-1 \neq 0$ quindi $A - I_3$ e di caratteristica almeno 2 (per altro sappiamo che non è 3). Segue che l'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità geometrica $3 - 2 = 1$ e quindi non è regolare.

Per $a = 4$, l'autovalore 1 è semplice (quindi regolare) e l'autovalore 4 è doppio. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice 2×2 in basso a destra ha determinante 4 e quindi l'autovalore $\lambda_2 = 4$ di nuovo non è regolare e la matrice quindi non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice A è diagonalizzabile per tutti e soli i valori di a diversi da 1 e 4.

d) Determinare gli autovettori di A per $a = -2$.

Abbiamo già trovato gli autovalori di A si tratta solo di risolvere i tre sistemi omogenei (si ricorda che una volta trovato gli autovettori conviene verificare che $Av = \lambda v$).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
24 giugno 2011 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Siano

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -3 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ a \\ -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dove a e b sono dei parametri reali.

a) Determinare, se esistono, i valori dei parametri a e b tali che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ risultino linearmente indipendenti.

Per determinare se i 4 vettori sono linearmente indipendenti, basta calcolare la caratteristica della matrice costituita dalle coordinate dei quattro vettori ovvero della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -2 & a & 3 & a \\ 1 & -3 & 1 & -6 \\ -3 & b & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il procedimento di Kronecker. Il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0 quindi la matrice M ha caratteristica almeno 1. La sottomatrice costituita dalla prima e terza riga e prima e terza colonna, ovvero

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante 2 per cui la matrice M ha caratteristica almeno 2. La sottomatrice costituita dalla prima, terza e quinta riga e dalle tre prime colonne, overro

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

ha determinante

$$\begin{aligned}
\det M_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{usando la prima colonna} \\ \text{per semplificare la prima} \\ \text{riga} \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 15
\end{aligned}$$

per cui la matrice M ha caratteristica almeno 3.

Consideriamo quindi il determinante della matrice costituita da tutte le righe di A tranne la quarta, cioè

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -2 & a & 3 & a \\ 1 & -3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già una strategia per semplificare il determinante:

$$\begin{aligned}
\det M_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -2 & a & 3 & a \\ 1 & -3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & a+4 & 1 & a+12 \\ 1 & -5 & 2 & -12 \\ 2 & -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+4 & 1 & a+12 \\ -5 & 2 & -12 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & a+3 \\ -15 & 0 & -30 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a-1 & a+3 \\ -15 & -30 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} a-1 & a+3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -15(2a-2-a-3) \\
&= -15(a-5)
\end{aligned}$$

Quindi per $a \neq 5$ la matrice M_4 ha determinante diverso da 0 e quindi M_4 e M hanno caratteristica 4.

Se invece $a = 5$, dobbiamo studiare il determinante della matrice

$$M_4' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & -6 \\ -3 & b & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\det M_4' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & -6 \\ -3 & b & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -12 \\ -3 & b+6 & 1 & 23 \\ 2 & -5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -5 & 2 & -12 \\ b+6 & 1 & 23 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -15 & 0 & -30 \\ b+1 & 0 & 14 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= -15 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ b+1 & 14 \end{vmatrix} = 30(b-6)$$

Quindi per $b \neq 6$ la matrice M_4' e quindi la matrice M hanno caratteristica 4.

In totale per $a = 5$ e $b = 6$ la matrice M ha caratteristica 3 e quindi i vettori $\underline{v}_1$ a $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Per tutti gli altri valori la matrice M ha caratteristica 4 e quindi codesti vettori sono linearmente indipendenti.

b) Determinare al variare dei parametri la dimensione del sottospazio V generato dai vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$.

È esattamente quanto abbiamo fatto prima: la dimensione del sottospazio V è la caratteristica di M, quindi è 4 sempre tranne quando $a = 5$ e $b = 6$ caso in cui la $\dim V = 3$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(1, 0, 2)$ e il piano π di equazione $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

a) Si trovi la retta r perpendicolare a π e passante per A.

La direzione di r è data da $\underline{v}_r = \underline{n}_\pi$, dove $\underline{n}_\pi = (1, -2, -2)$ è un vettore normale a π. Pertanto le equazioni parametriche di r sono

$$r : \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è parallela alla retta

$$s : \quad \begin{cases} 2x + z - 5 = 0 \\ -2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

La direzione di s è data da $\underline{v}_s = \underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (2, 0, 1)$ e $\underline{n}_2 = (-2, 1, -2)$ sono i vettori normali ai piani che compaiono nelle equazioni cartesiane di s. Si trova che $\underline{v}_s = (-1, 2, 2) = -\underline{v}_r$ e quindi r ed s sono parallele.

c) Si determini il piano contenente r ed s.

Il piano cercato è quello contenente s e passante per A. Consideriamo quindi il fascio dei piani contenenti s, ossia

$$\lambda(2x + z - 5) + \mu(-2x + y - 2z + 3) = 0,$$

e imponiamo il passaggio per $A(1, 0, 2)$. Otteniamo $\lambda = -3\mu$ e quindi l'equazione del piano cercato è $8x - y + 5z - 18 = 0$.

d) Si calcoli la distanza $\overline{AB}$, dove B è il punto d'intersezione tra π e r.

Non c'è bisogno di calcolare le coordinate del punto B, poiché la distanza tra A e B coincide con la distanza tra A e il piano π; pertanto essa è data da

$$\overline{AB} = \frac{|x_A - 2y_A - 2z_A + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{9}} .$$

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & -a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dove a è un parametro reale.

a) Verificare che 1 è un autovalore di A.

Abbiamo

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & a-1 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che la prima e la terza riga sono uguali per cui il determinante di $A - I_3$ è 0. Da questo deduciamo che 1 è autovalore di A.

b) Determinare il polinomio caratteristico di A e fattorizzarlo.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ a & a-\lambda & -a \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

quindi il polinomio caratteristico di A è

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ a & a-\lambda & -a \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ a & a-\lambda & -a \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad (C_3 - C_1) \\
&= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ a & a-\lambda & -a \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & a-\lambda & -a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ sommando la terza colonna alla prima} \\
&= (1-\lambda)(a-\lambda)(2-\lambda) \; .
\end{aligned}
$$

c) Determinare per quali valori del parametro a la matrice A è diagonalizzabile.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = a$. Se a è diverso da 1 e 2 allora la matrice A è automaticamente diagonalizzabile perché i suoi autovalori sono semplici.

Per $a = 1$, l'autovalore 2 è semplice (quindi regolare) e l'autovalore 1 è doppio. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice 2×2 in alto a sinistra è di determinante $-1 \neq 0$ quindi $A - I_3$ e di caratteristica almeno 2 (per altro sappiamo che non è 3). Segue che l'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità geometrica $3 - 2 = 1$ e quindi non è regolare.

Per $a = 2$, l'autovalore 1 è semplice (quindi regolare) e l'autovalore 2 è doppio. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice 2×2 in basso a destra ha determinante 2 e quindi l'autovalore $\lambda_2 = 2$ di nuovo non è regolare e la matrice quindi non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice A è diagonalizzabile per tutti e soli i valori di a diversi da 1 e 2.

d) Determinare gli autovettori di A per $a = -2$.

Abbiamo già trovato gli autovalori di A si tratta solo di risolvere i tre sistemi omogenei (si ricorda che una volta trovato gli autovettori conviene verificare che $Av = \lambda v$).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
24 giugno 2011 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Siano

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ a \\ 0 \\ b \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ a \\ -3 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

dove a e b sono dei parametri reali.

a) Determinare, se esistono, i valori dei parametri a e b tali che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ risultino linearmente indipendenti.

Per determinare se i 4 vettori sono linearmente indipendenti, basta calcolare la caratteristica della matrice costituita dalle coordinate dei quattro vettori ovvero della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 9 \\ -2 & a & -3 & a \\ 1 & 0 & 4 & -3 \\ -3 & b & -5 & -4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il procedimento di Kronecker. Il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0 quindi la matrice M ha caratteristica almeno 1. La sottomatrice costituita dalla prima e terza riga e prima e terza colonna, ovvero

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ha determinante 2 per cui la matrice M ha caratteristica almeno 2. La sottomatrice costituita dalla prima, terza e quinta riga e dalle tre prime colonne, overro

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinante

$$\det M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{usando la prima colonna per semplificare la prima riga}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 15$$

per cui la matrice M ha caratteristica almeno 3.

Consideriamo quindi il determinante della matrice costituita da tutte le righe di A tranne la quarta, cioè

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 9 \\ -2 & a & -3 & a \\ 1 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già una strategia per semplificare il determinante:

$$\det M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 9 \\ -2 & a & -3 & a \\ 1 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & a+10 & 1 & a+18 \\ 1 & -5 & 2 & -12 \\ 2 & -5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+10 & 1 & a+18 \\ -5 & 2 & -12 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+5 & 0 & a+9 \\ -15 & 0 & -30 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+5 & a+9 \\ -15 & -30 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} a+5 & a+9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -15(2a+10-a-9)$$

$$= -15(a+1)$$

Quindi per $a \neq -1$ la matrice M_4 ha determinante diverso da 0 e quindi M_4 e M hanno caratteristica 4.

Se invece $a = -1$, dobbiamo studiare il determinante della matrice

$$M_4' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \\ -3 & b & -5 & -4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\det M_4' = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \\ -3 & b & -5 & -4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -12 \\ -3 & b+15 & 1 & 23 \\ 2 & -5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 2 & -12 \\ b+15 & 1 & 23 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -15 & 0 & -30 \\ b+10 & 0 & 14 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= -15 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ b+10 & 14 \end{vmatrix} = 30(b+3)$$

Quindi per $b \neq -3$ la matrice M_4' e quindi la matrice M hanno caratteristica 4.

In totale per $a = -1$ e $b = -3$ la matrice M ha caratteristica 3 e quindi i vettori $\underline{v}_1$ a $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Per tutti gli altri valori la matrice M ha caratteristica 4 e quindi codesti vettori sono linearmente indipendenti.

b) Determinare al variare dei parametri la dimensione del sottospazio V generato dai vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$.

È esattamente quanto abbiamo fatto prima: la dimensione del sottospazio V è la caratteristica di M, quindi è 4 sempre tranne quando $a = -1$ e $b = -3$ caso in cui la $\dim V = 3$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(1, 0, 2)$ e il piano π di equazione $x + y - 2z + 4 = 0$.

a) Si trovi la retta r perpendicolare a π e passante per A.

La direzione di r è data da $\underline{v}_r = \underline{n}_\pi$, dove $\underline{n}_\pi = (1, 1, -2)$ è un vettore normale a π. Pertanto le equazioni parametriche di r sono

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è parallela alla retta

$$s: \quad \begin{cases} 2x + z - 5 = 0 \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

La direzione di s è data da $\underline{v}_s = \underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (2, 0, 1)$ e $\underline{n}_2 = (1, 1, 1)$ sono i vettori normali ai piani che compaiono nelle equazioni cartesiane di s. Si trova che $\underline{v}_s = (-1, -1, 2) = -\underline{v}_r$ e quindi r ed s sono parallele.

c) Si determini il piano contenente r ed s.

Il piano cercato è quello contenente s e passante per A. Consideriamo quindi il fascio dei piani contenenti s, ossia

$$\lambda(2x + z - 5) + \mu(x + y + z + 3) = 0,$$

e imponiamo il passaggio per $A(1, 0, 2)$. Otteniamo $\lambda = 6\mu$ e quindi l'equazione del piano cercato è $13x + y + 7z - 27 = 0$.

d) Si calcoli la distanza $\overline{AB}$, dove B è il punto d'intersezione tra π e r.

Non c'è bisogno di calcolare le coordinate del punto B, poiché la distanza tra A e B coincide con la distanza tra A e il piano π; pertanto essa è data da

$$\overline{AB} = \frac{|x_A + y_A - 2z_A + 4|}{\sqrt{1^2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ .$$

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & a & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dove a è un parametro reale.

a) Verificare che 1 è un autovalore di A.

Abbiamo

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ a & a-1 & -a \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che la prima e la terza riga sono uguali per cui il determinante di $A - I_3$ è 0. Da questo deduciamo che 1 è autovalore di A.

b) Determinare il polinomio caratteristico di A e fattorizzarlo.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ a & a-\lambda & -a \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

quindi il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ a & a-\lambda & -a \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ a & a-\lambda & -a \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad (C_3 - C_1) \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ a & a-\lambda & -a \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & a-\lambda & -a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ sommando la terza colonna alla prima} \\
&= (1-\lambda)(a-\lambda)(-1-\lambda)\ .
\end{aligned}$$

c) Determinare per quali valori del parametro a la matrice A è diagonalizzabile.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = a$. Se a è diverso da 1 e -1 allora la matrice A è automaticamente diagonalizzabile perché i suoi autovalori sono semplici.

Per $a = 1$, l'autovalore -1 è semplice (quindi regolare) e l'autovalore 1 è doppio. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice 2×2 in alto a sinistra è di determinante $-1 \neq 0$ quindi $A - I_3$ e di caratteristica almeno 2 (per altro sappiamo che non è 3). Segue che l'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità geometrica $3 - 2 = 1$ e quindi non è regolare.

Per $a = -1$, l'autovalore 1 è semplice (quindi regolare) e l'autovalore -1 è doppio. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice 2×2 in basso a destra ha determinante -1 e quindi l'autovalore $\lambda_2 = -1$ di nuovo non è regolare e la matrice quindi non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice A è diagonalizzabile per tutti e soli i valori di a diversi da 1 e -1.

d) Determinare gli autovettori di A per $a = -2$.

Abbiamo già trovato gli autovalori di A si tratta solo di risolvere i tre sistemi omogenei (si ricorda che una volta trovato gli autovettori conviene verificare che $Av = \lambda v$).

Università degli Studi di Bergamo
— Modulo di Geometria e Algebra Lineare (nuovo programma) —
24 giugno 2011 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Appello

Esercizio 1. Siano

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ -2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ a \\ -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dove a e b sono dei parametri reali.

a) Determinare, se esistono, i valori dei parametri a e b tali che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ risultino linearmente indipendenti.

Per determinare se i 4 vettori sono linearmente indipendenti, basta calcolare la caratteristica della matrice costituita dalle coordinate dei quattro vettori ovvero della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & a & 1 & a \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ -3 & b & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il procedimento di Kronecker. Il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0 quindi la matrice M ha caratteristica almeno 1. La sottomatrice costituita dalla prima e terza riga e prima e terza colonna, ovvero

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha determinante 2 per cui la matrice M ha caratteristica almeno 2. La sottomatrice costituita dalla prima, terza e quinta riga e dalle tre prime colonne, overro

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha determinante

$$\begin{aligned} \det M_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{usando la prima colonna per semplificare la prima riga} \\ &= \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 15 \end{aligned}$$

per cui la matrice M ha caratteristica almeno 3.

Consideriamo quindi il determinante della matrice costituita da tutte le righe di A tranne la quarta, cioè

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & a & 1 & a \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già una strategia per semplificare il determinante:

$$\begin{aligned} \det M_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & a & 1 & a \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & a+6 & 1 & a+14 \\ 1 & -5 & 2 & -12 \\ 2 & -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+6 & 1 & a+14 \\ -5 & 2 & -12 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & a+5 \\ -15 & 0 & -30 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+1 & a+5 \\ -15 & -30 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} a+1 & a+5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -15(2a+2-a-5) \\ &= -15(a-3) \end{aligned}$$

Quindi per $a \neq 3$ la matrice M_4 ha determinante diverso da 0 e quindi M_4 e M hanno caratteristica 4.

Se invece $a = 3$, dobbiamo studiare il determinante della matrice

$$M_4' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ -3 & b & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\det M_4' = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ -3 & b & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -12 \\ -3 & b+9 & 1 & 23 \\ 2 & -5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 2 & -12 \\ b+9 & 1 & 23 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -15 & 0 & -30 \\ b+4 & 0 & 14 \\ -5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= -15 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ b+4 & 14 \end{vmatrix} = 30(b-3)$$

Quindi per $b \neq 3$ la matrice M_4' e quindi la matrice M hanno caratteristica 4.

In totale per $a = 3$ e $b = 3$ la matrice M ha caratteristica 3 e quindi i vettori $\underline{v}_1$ a $\underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Per tutti gli altri valori la matrice M ha caratteristica 4 e quindi codesti vettori sono linearmente indipendenti.

b) Determinare al variare dei parametri la dimensione del sottospazio V generato dai vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$.

È esattamente quanto abbiamo fatto prima: la dimensione del sottospazio V è la caratteristica di M, quindi è 4 sempre tranne quando $a = 3$ e $b = 3$ caso in cui la $\dim V = 3$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A(1, 0, 2)$ e il piano π di equazione $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

a) Si trovi la retta r perpendicolare a π e passante per A.

La direzione di r è data da $\underline{v}_r = \underline{n}_\pi$, dove $\underline{n}_\pi = (1, 2, -2)$ è un vettore normale a π. Pertanto le equazioni parametriche di r sono

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

b) Si dimostri che r è parallela alla retta

$$s: \begin{cases} 2x + z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

La direzione di s è data da $\underline{v}_s = \underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (2, 0, 1)$ e $\underline{n}_2 = (2, 1, 2)$ sono i vettori normali ai piani che compaiono nelle equazioni cartesiane di s. Si trova che $\underline{v}_s = (-1, -2, 2) = -\underline{v}_r$ e quindi r ed s sono parallele.

c) Si determini il piano contenente r ed s.

Il piano cercato è quello contenente s e passante per A. Consideriamo quindi il fascio dei piani contenenti s, ossia

$$\lambda(2x + z - 5) + \mu(2x + y + 2z + 3) = 0,$$

e imponiamo il passaggio per $A(1, 0, 2)$. Otteniamo $\lambda = 9\mu$ e quindi l'equazione del piano cercato è $20x + y + 11z - 42 = 0$.

d) Si calcoli la distanza $\overline{AB}$, dove B è il punto d'intersezione tra π e r.

Non c'è bisogno di calcolare le coordinate del punto B, poiché la distanza tra A e B coincide con la distanza tra A e il piano π; pertanto essa è data da

$$\overline{AB} = \frac{|x_A + 2y_A - 2z_A + 4|}{\sqrt{2^2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{9}} .$$

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & a & -a \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

dove a è un parametro reale.

a) Verificare che 1 è un autovalore di A.

Abbiamo

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a-1 & -a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che la prima e la terza riga sono uguali per cui il determinante di $A - I_3$ è 0. Da questo deduciamo che 1 è autovalore di A.

b) Determinare il polinomio caratteristico di A e fattorizzarlo.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ a & a-\lambda & -a \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

quindi il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ a & a-\lambda & -a \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ a & a-\lambda & -a \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad (C_3 - C_1) \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ a & a-\lambda & -a \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & a-\lambda & -a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ sommando la terza colonna alla prima} \\
&= (1-\lambda)(a-\lambda)(3-\lambda) \ .
\end{aligned}$$

c) Determinare per quali valori del parametro a la matrice A è diagonalizzabile.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = a$. Se a è diverso da 1 e 3 allora la matrice A è automaticamente diagonalizzabile perché i suoi autovalori sono semplici.

Per $a = 1$, l'autovalore 3 è semplice (quindi regolare) e l'autovalore 1 è doppio. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice 2×2 in alto a sinistra è di determinante $-1 \neq 0$ quindi $A - I_3$ e di caratteristica almeno 2 (per altro sappiamo che non è 3). Segue che l'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità geometrica $3 - 2 = 1$ e quindi non è regolare.

Per $a = 3$, l'autovalore 1 è semplice (quindi regolare) e l'autovalore 3 è doppio. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice 2×2 in basso a destra ha determinante 3 e quindi l'autovalore $\lambda_2 = 3$ di nuovo non è regolare e la matrice quindi non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice A è diagonalizzabile per tutti e soli i valori di a diversi da 1 e 3.

d) Determinare gli autovettori di A per $a = -2$.

Abbiamo già trovato gli autovalori di A si tratta solo di risolvere i tre sistemi omogenei (si ricorda che una volta trovato gli autovettori conviene verificare che $Av = \lambda v$).