Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
29 aprile 2011 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ x + 16y + 21z - 95 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 18x + 3y - 4z = 0 \\ x - y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

a) Verificare che le due rette sono incidenti e determinare il punto di intersezione A.

Ponendo $z = t$ si ottengono facilmente le seguenti equazioni parametriche di r_1:

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 6 - \frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

Inserendole nelle equazioni di r_2 si trova (in entrambe le equazioni) $t = 0$, cosicché le due rette si intersecano nel punto $A(-1, 6, 0)$.

b) Determinare la retta r_3 parallela ad r_2 e passante per il punto $B(2, 9, -7)$.

La direzione di r_2 è data da $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (18, 3, -4)$ e $\underline{n}_2 = (1, -1, -1)$ sono i vettori normali ai piani che compaiono nelle equazioni cartesiane di r_2. Si trova che $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (-7, 14, -21)$ e quindi come vettore direzionale di r_2 si può prendere $\underline{v} = (1, -2, 3)$. Pertanto r_3 ha le equazioni parametriche

$$r_3 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 9 - 2t \\ z = -7 + 3t \end{cases}$$

c) Verificare che le tre rette r_1, r_2 e r_3 sono complanari e determinare il piano che le contiene.

Possiamo determinare il piano π contenente r_2 e il punto B (e quindi anche la retta r_3) e poi verificare che π contiene anche r_1.

Consideriamo quindi il fascio dei piani contenenti r_2, ossia

$$\lambda(18x + 3y - 4z) + \mu(x - y - z + 7) = 0,$$

e imponiamo il passaggio per $B(2, 9, -7)$. Otteniamo $\mu = -13\lambda$ e quindi l'equazione di π è $5x + 16y + 9z - 91 = 0$.

Ci rimane da controllare che anche r_1 sia contenuta nel piano π. Per far ciò, basta sosituire le equazioni parametriche di r_1 nell'equazione di π ed osservare che si ottiene un'identità.

Un metodo alternativo per risolvere questo punto è quello di sfruttare il punto successivo. Più in dettaglio, si può mostrare che r_1 e r_3 sono incidenti, determinando il loro punto d'intersezione C. Poiché r_2 ed r_3 sono parallele (ed inoltre r_1 ed r_2 si intersecano in A), le tre rette sono complanari e il piano che le contiene è quello passante per i punti A, B e C.

d) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e C, dove C è il punto d'intersezione tra r_1 e r_3.

Inserendo le equazioni parametriche di r_3 in quelle cartesiane di r_1 si trova $t = 3$, cosicché le coordinate di C sono $(5, 3, 2)$. L'area cercata è

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| &= \frac{1}{2}\|(3, 3, -7) \wedge (6, -3, 2)\| = \frac{1}{2}\|(-15, -48, -27)\| = \frac{3}{2}\|(5, 16, 9)\| \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{362}.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Determinare al variare del parametro t l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + (t+3)z = 3 \\ 2x + 5y + 8z = 5 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t+3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti del sistema. La sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante 1, quindi la matrice A è di caratteristica almeno 2. Il determinante di A è $t - 1$ per cui è 0 se e solo se $t = 1$. Quindi se $t \neq 1$ per il teorema di Cramer (o di Rouché–Capelli) il sistema è determinato. Se invece $t = 1$, calcolando il determinante della matrice costituita dalle 2 prime colonne di A e la colonna dei termini noti (l'unica da considerare per il teorema di Kronecker) si trova 0. Quindi la matrice completa ha anche lei caratteristica 2 e quindi il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni (∞^1 soluzioni).

Risolvere il sistema nel caso $t = 1$.

C'è una retta di soluzioni. Scegliamo le due ultime equazioni e z come parametro (coerentemente con il fatto che abbiamo scelto il determinante 2×2 in basso a sinistra della matrice A). Le soluzioni sono della forma

$$(5 - 4z, -1, z)$$

con $z \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Determinare gli autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 9 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

e precisare se è diagonalizzabile.

Non ci sono particolari problemi nella risoluzione. Il polinomio caratteristico è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \ .$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ (doppio) e gli autovettori si calcolano facilmente. Poiché si verifica che tutti gli autovalori sono regolari, la matrice risulta diagonalizzabile.

Esercizio 4. Si consideri la conica di equazione

$$x^2 + y^2 + 6xy - 16\sqrt{2}\,x - 16\sqrt{2}\,y + 60 = 0 \ .$$

a) Si determini il cambiamento di coordinate che riduce la conica a forma canonica e la si classifichi.

   Bisogna anzitutto eliminare il termine $6xy$, ossia diagonalizzare la matrice

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

   I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$. Una base ortonormale di autovettori è data da

   $$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

   La rotazione cercata è quindi

   $$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

   e la nuova equazione della conica è

   $$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 16(x' - y') - 16(x' + y') + 60 = 0,$$

ossia, dopo divisione per 2, $2(x')^2 - (y')^2 - 16x' + 30 = 0$. Quest'ultima si può riscrivere come $2(x'-4)^2 - (y')^2 - 2 = 0$ e quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 4 \\ y'' = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{2} = 1.$$

Si tratta pertanto di un'iperbole. La trasformazione che porta la conica in forma canonica si ottiene componendo la rotazione con la traslazione. Il risultato è

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'' + 4) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'' + 4) \end{cases}$$

b) Si trovino le coordinate del centro (se esiste) della conica (rispetto al sistema di riferimento iniziale).

Dal punto precedente sappiamo che il centro della conica ha coordinate $x''_C = 0$, $y''_C = 0$, ossia $x_C = 2\sqrt{2}$, $y_C = 2\sqrt{2}$.

Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8\sqrt{2} \\ -8\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

c) Si trovino le coordinate dei vertici della conica (rispetto al sistema di riferimento iniziale).

Le coordinate dei (due) vertici sono $x''_V = \pm 1$, $y''_V = 0$, ossia $x_{V_1} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $y_{V_1} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ e $x_{V_2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y_{V_2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
29 aprile 2011 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ x + 16y + 21z + 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 18x + 3y - 4z + 18 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Verificare che le due rette sono incidenti e determinare il punto di intersezione A.

Ponendo $z = t$ si ottengono facilmente le seguenti equazioni parametriche di r_1:

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 0 - \frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

Inserendole nelle equazioni di r_2 si trova (in entrambe le equazioni) $t = 0$, cosicché le due rette si intersecano nel punto $A(-1, 0, 0)$.

b) Determinare la retta r_3 parallela ad r_2 e passante per il punto $B(2, 3, -7)$.

La direzione di r_2 è data da $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (18, 3, -4)$ e $\underline{n}_2 = (1, -1, -1)$ sono i vettori normali ai piani che compaiono nelle equazioni cartesiane di r_2. Si trova che $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (-7, 14, -21)$ e quindi come vettore direzionale di r_2 si può prendere $\underline{v} = (1, -2, 3)$. Pertanto r_3 ha le equazioni parametriche

$$r_3 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -7 + 3t \end{cases}$$

c) Verificare che le tre rette r_1, r_2 e r_3 sono complanari e determinare il piano che le contiene.

Possiamo determinare il piano π contenente r_2 e il punto B (e quindi anche la retta r_3) e poi verificare che π contiene anche r_1.

Consideriamo quindi il fascio dei piani contenenti r_2, ossia

$$\lambda(18x + 3y - 4z + 18) + \mu(x - y - z + 1) = 0,$$

e imponiamo il passaggio per $B(2, 3, -7)$. Otteniamo $\mu = -13\lambda$ e quindi l'equazione di π è $5x + 16y + 9z + 5 = 0$.

Ci rimane da controllare che anche r_1 sia contenuta nel piano π. Per far ciò, basta sosituire le equazioni parametriche di r_1 nell'equazione di π ed osservare che si ottiene un'identità.

Un metodo alternativo per risolvere questo punto è quello di sfruttare il punto successivo. Più in dettaglio, si può mostrare che r_1 e r_3 sono incidenti, determinando il loro punto d'intersezione C. Poiché r_2 ed r_3 sono parallele (ed inoltre r_1 ed r_2 si intersecano in A), le tre rette sono complanari e il piano che le contiene è quello passante per i punti A, B e C.

d) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e C, dove C è il punto d'intersezione tra r_1 e r_3.

Inserendo le equazioni parametriche di r_3 in quelle cartesiane di r_1 si trova $t = 3$, cosicché le coordinate di C sono $(5, -3, 2)$. L'area cercata è

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| &= \frac{1}{2}\|(3, 3, -7) \wedge (6, -3, 2)\| = \frac{1}{2}\|(-15, -48, -27)\| = \frac{3}{2}\|(5, 16, 9)\| \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{362}.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Determinare al variare del parametro t l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \qquad + (t+3)z = 3 \\ 2x - y + \qquad 7z = 10 \\ 3x - 2y + \qquad 12z = 17 \end{cases}$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t+3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti del sistema. La sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante -1, quindi la matrice A è di caratteristica almeno 2. Il determinante di A è $-t - 1$ per cui è 0 se e solo se $t = -1$. Quindi se $t \neq -1$ per il teorema di Cramer (o di Rouché–Capelli) il sistema è determinato. Se invece $t = -1$, calcolando il determinante della matrice costituita dalle 2 prime colonne di A e la colonna dei termini noti (l'unica da considerare per il teorema di Kronecker) si trova 0. Quindi la matrice completa ha anche lei caratteristica 2 e quindi il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni (∞^1 soluzioni).

Risolvere il sistema nel caso $t = -1$.

C'è una retta di soluzioni. Scegliamo le due ultime equazioni e z come parametro (coerentemente con il fatto che abbiamo scelto il determinante 2×2 in basso a sinistra della matrice A). Le soluzioni sono della forma

$$(3 - 2z, -4 + 3z, z)$$

con $z \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Determinare gli autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -7 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

e precisare se è diagonalizzabile.

Non ci sono particolari problemi nella risoluzione. Il polinomio caratteristico è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda\ .$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$ e gli autovettori si calcolano facilmente. Poiché gli autovalori sono semplici, la matrice risulta diagonalizzabile.

Esercizio 4. Si consideri la conica di equazione

$$x^2 + y^2 + 6xy - 4\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}\,y = 0\ .$$

a) Si determini il cambiamento di coordinate che riduce la conica a forma canonica e la si classifichi.

   Bisogna anzitutto eliminare il termine $6xy$, ossia diagonalizzare la matrice

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$. Una base ortonormale di autovettori è data da

   $$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\ , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\ .$$

   La rotazione cercata è quindi

   $$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

   e la nuova equazione della conica è

   $$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 4(x' - y') - 4(x' + y') = 0,$$

ossia, dopo divisione per 2, $2(x')^2 - (y')^2 - 4x' = 0$. Quest'ultima si può riscrivere come $2(x'-1)^2 - (y')^2 - 2 = 0$ e quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{2} = 1.$$

Si tratta pertanto di un'iperbole. La trasformazione che porta la conica in forma canonica si ottiene componendo la rotazione con la traslazione. Il risultato è

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'' + 1) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'' + 1) \end{cases}$$

b) Si trovino le coordinate del centro (se esiste) della conica (rispetto al sistema di riferimento iniziale).

Dal punto precedente sappiamo che il centro della conica ha coordinate $x''_C = 0$, $y''_C = 0$, ossia $x_C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_C = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

c) Si trovino le coordinate dei vertici della conica (rispetto al sistema di riferimento iniziale).

Le coordinate dei (due) vertici sono $x''_V = \pm 1$, $y''_V = 0$, ossia $x_{V_1} = \sqrt{2}$, $y_{V_1} = \sqrt{2}$ e $x_{V_2} = 0$, $y_{V_2} = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
29 aprile 2011 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ x + 16y + 21z + 17 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 18x + 3y - 4z + 21 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

a) Verificare che le due rette sono incidenti e determinare il punto di intersezione A.

Ponendo $z = t$ si ottengono facilmente le seguenti equazioni parametriche di r_1:

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 - \frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

Inserendole nelle equazioni di r_2 si trova (in entrambe le equazioni) $t = 0$, cosicché le due rette si intersecano nel punto $A(-1, -1, 0)$.

b) Determinare la retta r_3 parallela ad r_2 e passante per il punto $B(2, 2, -7)$.

La direzione di r_2 è data da $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (18, 3, -4)$ e $\underline{n}_2 = (1, -1, -1)$ sono i vettori normali ai piani che compaiono nelle equazioni cartesiane di r_2. Si trova che $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (-7, 14, -21)$ e quindi come vettore direzionale di r_2 si può prendere $\underline{v} = (1, -2, 3)$. Pertanto r_3 ha le equazioni parametriche

$$r_3 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -7 + 3t \end{cases}$$

c) Verificare che le tre rette r_1, r_2 e r_3 sono complanari e determinare il piano che le contiene.

Possiamo determinare il piano π contenente r_2 e il punto B (e quindi anche la retta r_3) e poi verificare che π contiene anche r_1.

Consideriamo quindi il fascio dei piani contenenti r_2, ossia

$$\lambda(18x + 3y - 4z + 21) + \mu(x - y - z) = 0,$$

e imponiamo il passaggio per $B(2, 2, -7)$. Otteniamo $\mu = -13\lambda$ e quindi l'equazione di π è $5x + 16y + 9z + 21 = 0$.

Ci rimane da controllare che anche r_1 sia contenuta nel piano π. Per far ciò, basta sosituire le equazioni parametriche di r_1 nell'equazione di π ed osservare che si ottiene un'identità.

Un metodo alternativo per risolvere questo punto è quello di sfruttare il punto successivo. Più in dettaglio, si può mostrare che r_1 e r_3 sono incidenti, determinando il loro punto d'intersezione C. Poiché r_2 ed r_3 sono parallele (ed inoltre r_1 ed r_2 si intersecano in A), le tre rette sono complanari e il piano che le contiene è quello passante per i punti A, B e C.

d) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e C, dove C è il punto d'intersezione tra r_1 e r_3.

Inserendo le equazioni parametriche di r_3 in quelle cartesiane di r_1 si trova $t = 3$, cosicché le coordinate di C sono $(5, -4, 2)$. L'area cercata è

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| &= \frac{1}{2}\|(3, 3, -7) \wedge (6, -3, 2)\| = \frac{1}{2}\|(-15, -48, -27)\| = \frac{3}{2}\|(5, 16, 9)\| \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{362}.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Determinare al variare del parametro t l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \phantom{{}-y} + (t-3)z = -1 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - y - 4z = -1 \end{cases}$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t-3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti del sistema. La sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante 1, quindi la matrice A è di caratteristica almeno 2. Il determinante di A è $t - 1$ per cui è 0 se e solo se $t = 1$. Quindi se $t \neq 1$ per il teorema di Cramer (o di Rouché–Capelli) il sistema è determinato. Se invece $t = 1$, calcolando il determinante della matrice costituita dalle 2 prime colonne di A e la colonna dei termini noti (l'unica da considerare per il teorema di Kronecker) si trova 0. Quindi la matrice completa ha anche lei caratteristica 2 e quindi il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni (∞^1 soluzioni).

Risolvere il sistema nel caso $t = 1$.

C'è una retta di soluzioni. Scegliamo le due ultime equazioni e z come parametro (coerentemente con il fatto che abbiamo scelto il determinante 2×2 in basso a sinistra della matrice A). Le soluzioni sono della forma

$$(-1 + 2z, -1, z)$$

con $z \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Determinare gli autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -8 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

e precisare se è diagonalizzabile.

Non ci sono particolari problemi nella risoluzione. Il polinomio caratteristico è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda \ .$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -2$ e gli autovettori si calcolano facilmente. Poiché gli autovalori sono semplici, la matrice risulta diagonalizzabile.

Esercizio 4. Si consideri la conica di equazione

$$x^2 + y^2 + 6xy + 8\sqrt{2}\,x + 8\sqrt{2}\,y + 12 = 0 \ .$$

a) Si determini il cambiamento di coordinate che riduce la conica a forma canonica e la si classifichi.

Bisogna anzitutto eliminare il termine $6xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 8(x' - y') + 8(x' + y') + 12 = 0,$$

ossia, dopo divisione per 2, $2(x')^2-(y')^2+8x'+6=0$. Quest'ultima si può riscrivere come $2(x'+2)^2-(y')^2-2=0$ e quindi la traslazione

$$\begin{cases} x''=x'+2 \\ y''=y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$(x'')^2-\frac{(y'')^2}{2}=1.$$

Si tratta pertanto di un'iperbole. La trasformazione che porta la conica in forma canonica si ottiene componendo la rotazione con la traslazione. Il risultato è

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y''-2) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y''-2) \end{cases}$$

b) Si trovino le coordinate del centro (se esiste) della conica (rispetto al sistema di riferimento iniziale).

Dal punto precedente sappiamo che il centro della conica ha coordinate $x''_C=0$, $y''_C=0$, ossia $x_C=-\sqrt{2}$, $y_C=-\sqrt{2}$.

Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

c) Si trovino le coordinate dei vertici della conica (rispetto al sistema di riferimento iniziale).

Le coordinate dei (due) vertici sono $x''_V=\pm 1$, $y''_V=0$, ossia $x_{V_1}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$, $y_{V_1}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ e $x_{V_2}=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$, $y_{V_2}=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
29 aprile 2011 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ x + 16y + 21z - 63 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 18x + 3y - 4z + 6 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

a) Verificare che le due rette sono incidenti e determinare il punto di intersezione A.

Ponendo $z = t$ si ottengono facilmente le seguenti equazioni parametriche di r_1:

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 - \frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

Inserendole nelle equazioni di r_2 si trova (in entrambe le equazioni) $t = 0$, cosicché le due rette si intersecano nel punto $A(-1, 4, 0)$.

b) Determinare la retta r_3 parallela ad r_2 e passante per il punto $B(2, 7, -7)$.

La direzione di r_2 è data da $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2$, dove $\underline{n}_1 = (18, 3, -4)$ e $\underline{n}_2 = (1, -1, -1)$ sono i vettori normali ai piani che compaiono nelle equazioni cartesiane di r_2. Si trova che $\underline{n}_1 \wedge \underline{n}_2 = (-7, 14, -21)$ e quindi come vettore direzionale di r_2 si può prendere $\underline{v} = (1, -2, 3)$. Pertanto r_3 ha le equazioni parametriche

$$r_3 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 - 2t \\ z = -7 + 3t \end{cases}$$

c) Verificare che le tre rette r_1, r_2 e r_3 sono complanari e determinare il piano che le contiene.

Possiamo determinare il piano π contenente r_2 e il punto B (e quindi anche la retta r_3) e poi verificare che π contiene anche r_1.

Consideriamo quindi il fascio dei piani contenenti r_2, ossia

$$\lambda(18x + 3y - 4z + 6) + \mu(x - y - z + 5) = 0,$$

e imponiamo il passaggio per $B(2, 7, -7)$. Otteniamo $\mu = -13\lambda$ e quindi l'equazione di π è $5x + 16y + 9z - 59 = 0$.

Ci rimane da controllare che anche r_1 sia contenuta nel piano π. Per far ciò, basta sosituire le equazioni parametriche di r_1 nell'equazione di π ed osservare che si ottiene un'identità.

Un metodo alternativo per risolvere questo punto è quello di sfruttare il punto successivo. Più in dettaglio, si può mostrare che r_1 e r_3 sono incidenti, determinando il loro punto d'intersezione C. Poiché r_2 ed r_3 sono parallele (ed inoltre r_1 ed r_2 si intersecano in A), le tre rette sono complanari e il piano che le contiene è quello passante per i punti A, B e C.

d) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e C, dove C è il punto d'intersezione tra r_1 e r_3.

Inserendo le equazioni parametriche di r_3 in quelle cartesiane di r_1 si trova $t = 3$, cosicché le coordinate di C sono $(5, 1, 2)$. L'area cercata è

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| &= \frac{1}{2}\|(3, 3, -7) \wedge (6, -3, 2)\| = \frac{1}{2}\|(-15, -48, -27)\| = \frac{3}{2}\|(5, 16, 9)\| \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{362}.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Determinare al variare del parametro t l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + (t-1)z = -3 \\ x + 3y - \qquad 4z = -6 \\ x + 2y - \qquad 2z = -3 \end{cases}$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t-1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti del sistema. La sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante -1, quindi la matrice A è di caratteristica almeno 2. Il determinante di A è $-t - 1$ per cui è 0 se e solo se $t = -1$. Quindi se $t \neq -1$ per il teorema di Cramer (o di Rouché–Capelli) il sistema è determinato. Se invece $t = -1$, calcolando il determinante della matrice costituita dalle 2 prime colonne di A e la colonna dei termini noti (l'unica da considerare per il teorema di Kronecker) si trova 0. Quindi la matrice completa ha anche lei caratteristica 2 e quindi il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni (∞^1 soluzioni).
Risolvere il sistema nel caso $t = -1$.

C'è una retta di soluzioni. Scegliamo le due ultime equazioni e z come parametro (coerentemente con il fatto che abbiamo scelto il determinante 2×2 in basso a sinistra della matrice A). Le soluzioni sono della forma

$$(3 - 2z, -3 + 2z, z)$$

con $z \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Determinare gli autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \\ -6 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

e precisare se è diagonalizzabile.

Non ci sono particolari problemi nella risoluzione. Il polinomio caratteristico è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 \ .$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$ e gli autovettori si calcolano facilmente. Poiché gli autovalori sono semplici, la matrice risulta diagonalizzabile.

Esercizio 4. Si consideri la conica di equazione

$$x^2 + y^2 + 6xy - 12\sqrt{2}\,x - 12\sqrt{2}\,y + 32 = 0 \ .$$

a) Si determini il cambiamento di coordinate che riduce la conica a forma canonica e la si classifichi.

   Bisogna anzitutto eliminare il termine $6xy$, ossia diagonalizzare la matrice

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

   I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$. Una base ortonormale di autovettori è data da

   $$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

   La rotazione cercata è quindi

   $$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

   e la nuova equazione della conica è

   $$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 12(x' - y') - 12(x' + y') + 32 = 0,$$

ossia, dopo divisione per 2, $2(x')^2 - (y')^2 - 12x' + 16 = 0$. Quest'ultima si può riscrivere come $2(x'-3)^2 - (y')^2 - 2 = 0$ e quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 3 \\ y'' = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{2} = 1.$$

Si tratta pertanto di un'iperbole. La trasformazione che porta la conica in forma canonica si ottiene componendo la rotazione con la traslazione. Il risultato è

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'' + 3) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'' + 3) \end{cases}$$

b) Si trovino le coordinate del centro (se esiste) della conica (rispetto al sistema di riferimento iniziale).

Dal punto precedente sappiamo che il centro della conica ha coordinate $x''_C = 0$, $y''_C = 0$, ossia $x_C = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y_C = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Si trovino le coordinate dei vertici della conica (rispetto al sistema di riferimento iniziale).

Le coordinate dei (due) vertici sono $x''_V = \pm 1$, $y''_V = 0$, ossia $x_{V_1} = 2\sqrt{2}$, $y_{V_1} = 2\sqrt{2}$ e $x_{V_2} = \sqrt{2}$, $y_{V_2} = \sqrt{2}$.