Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
9 febbraio 2011 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
Risolvere l'equazione

$$\left(z^2+(-8-2i)z+15+16i\right)\left(|z^2+1|+2\right)=0$$

in forma algebrica e disegnare le sue soluzioni sul piano di Gauss.

L'equazione si presenta sotto la forma di un prodotto uguale a zero. Le soluzioni dell'equazione saranno le soluzioni di

$$z^2+(-8-2i)z+15+16i=0$$

unite alle soluzioni di

$$|z^2+1|+2=0\ .$$

La seconda equazione non ha soluzioni. Infatti il modulo è un numero reale positivo o nullo; quando gli si aggiunge 2 il risultato è un reale almeno uguale a 2, e quindi non nullo. La prima equazione è invece un'equazione di secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta=(-8-2i)^2-4\cdot 1\cdot(15+16i)=-32i$$

le cui radici quadrate sono

$$\delta=\pm 4(1-i)\ .$$

Osservazione: il numero $-32i$ ha modulo 32 e argomento $\frac{3\pi}{2}$ per cui le sue radici quadrate avranno modulo $4\sqrt{2}$ e argomento $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}-\pi=-\frac{\pi}{4}$; quindi sono quelle indicate. In modo alternativo si potevano cercare le radici quadrate sotto la forma $a+ib$ e si vedeva che $a^2=b^2$ per ciò $a=\pm b$ e $2ab=-32$ da cui $ab=-16$ quindi $a=-b$ (e non $a=b$) e per ciò $a=-b=\pm 4$.
Le soluzioni saranno quindi

$$z_1=\frac{-(-8-2i)+4(1-i)}{2}=6-i \quad \text{e} \quad z_2=\frac{-(-8-2i)-4(1-i)}{2}=2+3i\ .$$

Esercizio 2.
Determinare in quali delle seguenti famiglie i vettori sono linearmente indipendenti.

Osserviamo che per qualsiasi famiglia di vettori, determinare quanti sono linearmente indipendenti può essere fatto calcolando la caratteristica (o il rango) della matrice costituita dai loro componenti. Le soluzioni proposte qui sono diverse, verificano direttamente l'indipendenza lineare dei vettori.

a) $\left(\underline{u}_1 = (2;3;-1;5;-4),\ \underline{u}_2 = (-2;1;-3;2;-4),\ \underline{u}_3 = (-1;3;2;-4;1)\right)$

   I vettori sono linearmente indipendenti. Infatti se $x\underline{u}_1 + y\underline{u}_2 + z\underline{u}_3 = \underline{0}$ allora $(2x - 2y - z; 3x + y + 3z; -x - 3y + 2z; 5x + 2y - 4z; -4x - 4y + z) = (0;0;0;0;0)$ quindi $z = 2x+2y$ (nella prima componente) e $z = 4x+4y$ (nella quinta) da cui $z = x+y = 0$ e quindi $2x = 0$ (nella seconda) quindi $x = y = 0$.

b) $\left(\underline{v}_1 = (1;2;-3;2),\ \underline{v}_2 = (-2;1;-1;3),\ \underline{v}_3 = (1;2;-3;2)\right)$

   I vettori sono linearmente dipendenti perché $\underline{v}_1 = \underline{v}_3$.

c) $\left(\underline{w}_1 = (1;5;-2),\ \underline{w}_2 = (2;3;-1),\ \underline{w}_3 = (3;1;0)\right)$

   I vettori sono linearmente dipendenti. Infatti le terne $(x;y;z)$ tali che $x\underline{w}_1 + y\underline{w}_2 + z\underline{w}_3 = \underline{0}$ sono quelle per cui $x + 2y + 3z = 0$, $5x + 3y + z = 0$, $-2x - y = 0$, quindi $y = -2x$ (nella terza componente) e $z = x$ (sia nella prima che nella seconda), quindi tutte le terne $(x;-2x;x)$; in particolare $(1;-2;1)$ è una tale terna e quindi i vettori sono linearmente dipendenti.

Esercizio 3.
Si considerino le rette

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

a) Determinare (se esiste) un punto di intersezione tra r ed s.

   Basta inserire le equazioni di r in quelle di s ed osservare che si ottiene un sistema impossibile. Ciò significa che le due rette non si intersecano.

b) Determinare (se esiste) un piano contenente s e parallelo ad r.

   Consideriamo il fascio dei piani contenenti s, ossia

   $$\lambda(x - y + 2z + 2) + \mu(y - z + 3) = 0,$$

   con il suo vettore normale $\underline{n} = (\lambda, -\lambda+\mu, 2\lambda-\mu)$. Poiché $\underline{v}_r = (-2,1,3)$ è un vettore direzionale della retta r, la condizione di parallelismo è $\underline{n} \cdot \underline{v}_r = 0$, ossia $\lambda = \frac{2}{3}\mu$. Inserendo questo risultato nell'equazione del fascio di piani si ottiene l'equazione del piano cercato:

   $$2x + y + z + 13 = 0.$$

c) Determinare (se esiste) un piano contenente r ed ortogonale ad s.

È chiaro che se un tale piano esiste, allora le due rette sono ortogonali. Ma $\underline{v}_s = (1,-1,2) \wedge (0,1,-1) = (-1,1,1)$ e $\underline{v}_r \cdot \underline{v}_s \neq 0$, il che significa che r ed s non sono ortogonali e quindi il piano richiesto non esiste.

Esercizio 4.
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -18 & -24 & 30 \\ -24 & -32 & 40 \\ 30 & 40 & -50 \end{pmatrix}$$

a) Mostrare che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio) e $\lambda_2 = -100$ (semplice).

Abbiamo che

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -18-\lambda & -24 & 30 \\ -24 & -32-\lambda & 40 \\ 30 & 40 & -50-\lambda \end{vmatrix}$$

sottraendo $\frac{3}{4}$ della seconda riga alla prima

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{3}{4}\lambda & 0 \\ -24 & -32-\lambda & 40 \\ 30 & 40 & -50-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ -24 & -32-\lambda & 40 \\ 30 & 40 & -50-\lambda \end{vmatrix}$$

sommando $\frac{3}{4}$ della prima colonna alla seconda

$$= \lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -24 & -50-\lambda & 40 \\ 30 & \frac{125}{2} & -50-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda + 100).$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = 0$ (doppio) e $\lambda_2 = -100$ (semplice).

b) Esiste una base (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Una tale base esiste certamente, perché la matrice A è simmetrica e quindi diagonalizzabile.

Determiniamo ora tale base, calcolando gli autovettori di A. Per quanto riguarda $\lambda_1 = 0$, si tratta di trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} -18x - 24y + 30z = 0 \\ -24x - 32y + 40z = 0 \\ 30x + 40y - 50z = 0 \end{cases}$$

Tutte le equazioni sono multiple dell'equazione $3x + 4y - 5z = 0$, quindi le soluzioni cercate sono $z = \frac{1}{5}(3x + 4y)$, con x e y arbitrari (ma non entrambi nulli). Quindi una coppia di autovettori relativi a λ_1 e linearmente indipendenti è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_1 = A\underline{v}_2 = \underline{0}$.

Allo stesso modo, per determinare gli autovettori relativi a $\lambda_2 = -100$ dobbiamo trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$(A + 100I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A + 100I_3 = \begin{pmatrix} 82 & -24 & 30 \\ -24 & 68 & 40 \\ 30 & 40 & 50 \end{pmatrix},$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} 82x - 24y + 30z = 0 \\ -24x + 68y + 40z = 0 \\ 30x + 40y + 50z = 0 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 41x - 12y + 15z = 0 \\ 6x - 17y - 10z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Sottraendo 3 volte la terza alla prima e aggiungendo due volte la terza alla seconda si ottiene

$$\begin{cases} 32x - 24y = 0 \\ 12x - 9y = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Le due prime equazioni sono multiple di $4x - 3y = 0$ e il sistema ha quindi come soluzioni $x = \frac{3}{4}y$ e $z = -\frac{5}{4}y$, con $y \neq 0$. Quindi gli autovettori relativi a λ_2 sono

i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. **Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_3 = -100\underline{v}_3$.**

In conclusione, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori di A.

c) Esiste una base ortonormale (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Una tale base esiste certamente, perché la matrice A è simmetrica e quindi ortodiagonalizzabile. Per determinarla dobbiamo anzitutto trovare una coppia di autovettori relativi a λ_1 che siano versori tra loro ortogonali. Possiamo decidere di normalizzare $\underline{v}_1$, ossia introdurre

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{\|\underline{v}_1\|}\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}.$$

Imponendo ora l'ortogonalità tra $\underline{v}_1$ e il generico autovettore relativo a λ_1, ossia $(x, y, \frac{1}{5}(3x+4y))$ con x e y non entrambi nulli, otteniamo l'equazione $17x + 6y = 0$, cioè l'autovettore $(x, -\frac{17}{6}x, -\frac{5}{3}x)$, con $x \neq 0$. Normalizzando anche questo vettore abbiamo che $x^2 = \frac{36}{425}$ e quindi arriviamo ad

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5\sqrt{17}} \\ -\frac{\sqrt{17}}{5} \\ -\frac{2}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda l'autovalore λ_2, basta normalizzare $\underline{v}_3 = (3, 4, -5)$, ossia introdurre

$$\underline{u}_3 = \frac{1}{\|\underline{v}_3\|}\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare (ed è anche un fatto generale) che $\underline{u}_3$ è ortogonale ad ogni autovettore relativo a λ_1. In conclusione, $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ è una base ortonormale di autovettori di A.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
9 febbraio 2011 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
Risolvere l'equazione

$$\left(z^2 + 2iz - 1 + 8i\right)\left(|z^2 + 1| + 3\right) = 0$$

in forma algebrica e disegnare le sue soluzioni sul piano di Gauss.

L'equazione si presenta sotto la forma di un prodotto uguale a zero. Le soluzioni dell'equazione saranno le soluzioni di

$$z^2 + 2iz - 1 + 8i = 0$$

unite alle soluzioni di

$$|z^2 + 1| + 3 = 0 \ .$$

La seconda equazione non ha soluzioni. Infatti il modulo è un numero reale positivo o nullo; quando gli si aggiunge 3 il risultato è un reale almeno uguale a 3, e quindi non nullo. La prima equazione è invece un'equazione di secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 + 8i) = -32i$$

le cui radici quadrate sono

$$\delta = \pm 4(1 - i) \ .$$

Osservazione: il numero $-32i$ ha modulo 32 e argomento $\frac{3\pi}{2}$ per cui le sue radici quadrate avranno modulo $4\sqrt{2}$ e argomento $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}$; quindi sono quelle indicate. In modo alternativo si potevano cercare le radici quadrate sotto la forma $a + ib$ e si vedeva che $a^2 = b^2$ per ciò $a = \pm b$ e $2ab = -32$ da cui $ab = -16$ quindi $a = -b$ (e non $a = b$) e per ciò $a = -b = \pm 4$.
Le soluzioni saranno quindi

$$z_1 = \frac{-(2i) + 4(1 - i)}{2} = 2 - 3i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-(2i) - 4(1 - i)}{2} = -2 + i \ .$$

Esercizio 2.
Determinare in quali delle seguenti famiglie i vettori sono linearmente indipendenti.

Osserviamo che per qualsiasi famiglia di vettori, determinare quanti sono linearmente indipendenti può essere fatto calcolando la caratteristica (o il rango) della matrice costituita dai loro componenti. Le soluzioni proposte qui sono diverse, verificano direttamente l'indipendenza lineare dei vettori.

a) $\left(\underline{u}_1 = (2;3;-1;2;-4),\ \underline{u}_2 = (3;-1;2;1;-3),\ \underline{u}_3 = (1;7;-4;3;-5)\right)$

I vettori sono linearmente dipendenti, infatti il terzo vettore è due volte il primo meno il secondo.

b) $\left(\underline{v}_1 = (1;-5;2;1),\ \underline{v}_2 = (-2;1;3;-4),\ \underline{v}_3 = (-1;-4;5;-3)\right)$

I vettori sono linearmente dipendenti perché il terzo vettore è la somma degli altri due (in alternativa le terne $(x;y;z)$ tali che $x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 = \underline{0}$ sono della forma $(x;x;-x)$ e quindi contengono la terna $(1;1;-1)$).

c) $\left(\underline{w}_1 = (2;1;-3;-1;5),\ \underline{w}_2 = (1;2;-3;2;-3),\ \underline{w}_3 = (-2;1;-5;3;1)\right)$

I vettori sono linearmente indipendenti perché se $x\underline{w}_1 + y\underline{w}_2 + z\underline{w}_3 = \underline{0}$ allora $(2x + y - 2z; x + 2y + z; -3x - 3y - 5z; -x + 2y + 3z; 5x - 3y + z) = (0;0;0;0;0)$ e quindi $y = -2x + 2z$ (nella prima componente) da cui $-3x + 5z = 0$ (nella seconda) e $-5x + 7z = 0$ (nella quarta) le due ultime equazioni formano un sistema determinato quindi con unica soluzione $x = z = 0$ e quindi $y = 0$.

Esercizio 3.
Si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

a) Determinare (se esiste) un punto di intersezione tra r ed s.

Basta inserire le equazioni di r in quelle di s ed osservare che si ottiene un sistema impossibile. Ciò significa che le due rette non si intersecano.

b) Determinare (se esiste) un piano contenente s e parallelo ad r.

Consideriamo il fascio dei piani contenenti s, ossia

$$\lambda(x - y + 2z + 1) + \mu(y - z + 3) = 0,$$

con il suo vettore normale $\underline{n} = (\lambda, -\lambda + \mu, 2\lambda - \mu)$. Poiché $\underline{v}_r = (-2, 1, 3)$ è un vettore direzionale della retta r, la condizione di parallelismo è $\underline{n} \cdot \underline{v}_r = 0$, ossia $\lambda = \frac{2}{3}\mu$. Inserendo questo risultato nell'equazione del fascio di piani si ottiene l'equazione del piano cercato:

$$2x + y + z + 11 = 0.$$

c) Determinare (se esiste) un piano contenente r ed ortogonale ad s.

È chiaro che se un tale piano esiste, allora le due rette sono ortogonali. Ma $\underline{v}_s = (1,-1,2) \wedge (0,1,-1) = (-1,1,1)$ e $\underline{v}_r \cdot \underline{v}_s \neq 0$, il che significa che r ed s non sono ortogonali e quindi il piano richiesto non esiste.

Esercizio 4.
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & -15 \\ 12 & 16 & -20 \\ -15 & -20 & 25 \end{pmatrix}$$

a) Mostrare che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio) e $\lambda_2 = 50$ (semplice).

Abbiamo che

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 & -15 \\ 12 & 16-\lambda & -20 \\ -15 & -20 & 25-\lambda \end{vmatrix}$$

sottraendo $\frac{3}{4}$ della seconda riga alla prima

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{3}{4}\lambda & 0 \\ 12 & 16-\lambda & -20 \\ -15 & -20 & 25-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 12 & 16-\lambda & -20 \\ -15 & -20 & 25-\lambda \end{vmatrix}$$

sommando $\frac{3}{4}$ della prima colonna alla seconda

$$= \lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 12 & 25-\lambda & -20 \\ -15 & -\frac{125}{4} & 25-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 50).$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = 0$ (doppio) e $\lambda_2 = 50$ (semplice).

b) Esiste una base (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Una tale base esiste certamente, perché la matrice A è simmetrica e quindi diagonalizzabile.

Determiniamo ora tale base, calcolando gli autovettori di A. Per quanto riguarda $\lambda_1 = 0$, si tratta di trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} 9x + 12y - 15z = 0 \\ 12x + 16y - 20z = 0 \\ -15x - 20y + 25z = 0 \end{cases}$$

Tutte le equazioni sono multiple dell'equazione $3x + 4y - 5z = 0$, quindi le soluzioni cercate sono $z = \frac{1}{5}(3x + 4y)$, con x e y arbitrari (ma non entrambi nulli). Quindi una coppia di autovettori relativi a λ_1 e linearmente indipendenti è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_1 = A\underline{v}_2 = \underline{0}$.

Allo stesso modo, per determinare gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 50$ dobbiamo trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$(A - 50I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A - 50I_3 = \begin{pmatrix} -41 & 12 & -15 \\ 12 & -34 & -20 \\ -15 & -20 & -25 \end{pmatrix},$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} -41x + 12y - 15z = 0 \\ 12x - 34y - 20z = 0 \\ -15x - 20y - 25z = 0 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 41x - 12y + 15z = 0 \\ 6x - 17y - 10z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Sottraendo 3 volte la terza alla prima e aggiungendo due volte la terza alla seconda si ottiene

$$\begin{cases} 32x - 24y = 0 \\ 12x - 9y = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Le due prime equazioni sono multiple di $4x - 3y = 0$ e il sistema ha quindi come soluzioni $x = \frac{3}{4}y$ e $z = -\frac{5}{4}y$, con $y \neq 0$. Quindi gli autovettori relativi a λ_2 sono

i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. **Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_3 = 50\underline{v}_3$.**

In conclusione, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori di A.

c) Esiste una base ortonormale (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Una tale base esiste certamente, perché la matrice A è simmetrica e quindi ortodiagonalizzabile. Per determinarla dobbiamo anzitutto trovare una coppia di autovettori relativi a λ_1 che siano versori tra loro ortogonali. Possiamo decidere di normalizzare $\underline{v}_1$, ossia introdurre

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{\|\underline{v}_1\|}\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}.$$

Imponendo ora l'ortogonalità tra $\underline{v}_1$ e il generico autovettore relativo a λ_1, ossia $(x, y, \frac{1}{5}(3x + 4y))$ con x e y non entrambi nulli, otteniamo l'equazione $17x + 6y = 0$, cioè l'autovettore $(x, -\frac{17}{6}x, -\frac{5}{3}x)$, con $x \neq 0$. Normalizzando anche questo vettore abbiamo che $x^2 = \frac{36}{425}$ e quindi arriviamo ad

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5\sqrt{17}} \\ -\frac{\sqrt{17}}{5} \\ -\frac{2}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda l'autovalore λ_2, basta normalizzare $\underline{v}_3 = (3, 4, -5)$, ossia introdurre

$$\underline{u}_3 = \frac{1}{\|\underline{v}_3\|}\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare (ed è anche un fatto generale) che $\underline{u}_3$ è ortogonale ad ogni autovettore relativo a λ_1. In conclusione, $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ è una base ortonormale di autovettori di A.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
9 febbraio 2011 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
Risolvere l'equazione

$$\big(z^2 + (-6 + 6i)z - 10i\big)\big(|z^2 + 1| + 4\big) = 0$$

in forma algebrica e disegnare le sue soluzioni sul piano di Gauss.

L'equazione si presenta sotto la forma di un prodotto uguale a zero. Le soluzioni dell'equazione saranno le soluzioni di

$$z^2 + (-6 + 6i)z - 10i = 0$$

unite alle soluzioni di

$$|z^2 + 1| + 4 = 0 \ .$$

La seconda equazione non ha soluzioni. Infatti il modulo è un numero reale positivo o nullo; quando gli si aggiunge 4 il risultato è un reale almeno uguale a 4, e quindi non nullo. La prima equazione è invece un'equazione di secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (-6 + 6i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10i) = -32i$$

le cui radici quadrate sono

$$\delta = \pm 4(1 - i) \ .$$

Osservazione: il numero $-32i$ ha modulo 32 e argomento $\frac{3\pi}{2}$ per cui le sue radici quadrate avranno modulo $4\sqrt{2}$ e argomento $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}$; quindi sono quelle indicate. In modo alternativo si potevano cercare le radici quadrate sotto la forma $a + ib$ e si vedeva che $a^2 = b^2$ per ciò $a = \pm b$ e $2ab = -32$ da cui $ab = -16$ quindi $a = -b$ (e non $a = b$) e per ciò $a = -b = \pm 4$.
Le soluzioni saranno quindi

$$z_1 = \frac{-(-6 + 6i) + 4(1 - i)}{2} = 5 - 5i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-(-6 + 6i) - 4(1 - i)}{2} = 1 - i \ .$$

Esercizio 2.
Determinare in quali delle seguenti famiglie i vettori sono linearmente indipendenti.

Osserviamo che per qualsiasi famiglia di vettori, determinare quanti sono linearmente indipendenti può essere fatto calcolando la caratteristica (o il rango) della matrice costituita dai loro componenti. Le soluzioni proposte qui sono diverse, verificano direttamente l'indipendenza lineare dei vettori.

a) $\Big(\underline{u}_1 = (1;2),\ \underline{u}_2 = (-1;3),\ \underline{u}_3 = (2;-1)\Big)$

I vettori sono linearmente dipendenti perché è una famiglia di tre vettori in uno spazio di dimensione 2.

b) $\Big(\underline{v}_1 = (-2;5;1;2;-1),\ \underline{v}_2 = (2;3;-1;4;-1),\ \underline{v}_3 = (-1;5;2;-4;1)\Big)$

I vettori sono linearmente indipendenti perché se $x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 = \underline{0}$ allora $(-2x + 2y - z; 5x + 3y + 5z; x - y + 2z; 2x + 4y - 4z; -x - y + z) = (0;0;0;0;0)$ e quindi $z = x + y$ (nell'ultima componente), $y = 3x$ (nella prima), quindi $z = 4x$ e quindi $6x = 0$ (nella terza) da cui $x = y = z = 0$.

c) $\Big(\underline{w}_1 = (3;-1;2;1;4),\ \underline{w}_2 = (-1;2;1;-4;3),\ \underline{w}_3 = (4;-3;1;5;1)\Big)$

I vettori sono linearmente dipendenti perché il primo è la somma degli altri due (in alternativa cercando gli $(x;y;z)$ tali che $x\underline{w}_1 + y\underline{w}_2 + z\underline{w}_3 = \underline{0}$ sono quelli per cui $(3x-y+4z; -x+2y-3z; 2x+y+z; x-4y+5z; 4x+3y+z) = (0;0;0;0;0)$ e quindi tali che $x = 2y - 3z$ (nella seconda componente) e quindi $y - z = 0$ (in tutte le altre componenti) da cui $x = -y = -z$, comprende quindi $x = -y = -z = 1$).

Esercizio 3.
Si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

a) Determinare (se esiste) un punto di intersezione tra r ed s.

Basta inserire le equazioni di r in quelle di s ed osservare che si ottiene un sistema impossibile. Ciò significa che le due rette non si intersecano.

b) Determinare (se esiste) un piano contenente s e parallelo ad r.

Consideriamo il fascio dei piani contenenti s, ossia

$$\lambda(x - y + 2z + 4) + \mu(y - z + 3) = 0,$$

con il suo vettore normale $\underline{n} = (\lambda, -\lambda+\mu, 2\lambda-\mu)$. Poiché $\underline{v}_r = (-2,1,3)$ è un vettore direzionale della retta r, la condizione di parallelismo è $\underline{n} \cdot \underline{v}_r = 0$, ossia $\lambda = \frac{2}{3}\mu$.

Inserendo questo risultato nell'equazione del fascio di piani si ottiene l'equazione del piano cercato:

$$2x + y + z + 17 = 0.$$

c) Determinare (se esiste) un piano contenente r ed ortogonale ad s.

È chiaro che se un tale piano esiste, allora le due rette sono ortogonali. Ma $\underline{v}_s = (1,-1,2) \wedge (0,1,-1) = (-1,1,1)$ e $\underline{v}_r \cdot \underline{v}_s \neq 0$, il che significa che r ed s non sono ortogonali e quindi il piano richiesto non esiste.

Esercizio 4.

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 24 & -30 \\ 24 & 32 & -40 \\ -30 & -40 & 50 \end{pmatrix}$$

a) Mostrare che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio) e $\lambda_2 = 100$ (semplice).

Abbiamo che

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 18-\lambda & 24 & -30 \\ 24 & 32-\lambda & -40 \\ -30 & -40 & 50-\lambda \end{vmatrix}$$

sottraendo $\frac{3}{4}$ della seconda riga alla prima

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{3}{4}\lambda & 0 \\ 24 & 32-\lambda & -40 \\ -30 & -40 & 50-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 24 & 32-\lambda & -40 \\ -30 & -40 & 50-\lambda \end{vmatrix}$$

sommando $\frac{3}{4}$ della prima colonna alla seconda

$$= \lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 24 & 50-\lambda & -40 \\ -30 & -\frac{125}{2} & 50-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 100).$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = 0$ (doppio) e $\lambda_2 = 100$ (semplice).

b) Esiste una base (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Una tale base esiste certamente, perché la matrice A è simmetrica e quindi diagonalizzabile.

Determiniamo ora tale base, calcolando gli autovettori di A. Per quanto riguarda $\lambda_1 = 0$, si tratta di trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} 18x + 24y - 30z = 0 \\ 24x + 32y - 40z = 0 \\ -30x - 40y + 50z = 0 \end{cases}$$

Tutte le equazioni sono multiple dell'equazione $3x + 4y - 5z = 0$, quindi le soluzioni cercate sono $z = \frac{1}{5}(3x + 4y)$, con x e y arbitrari (ma non entrambi nulli). Quindi una coppia di autovettori relativi a λ_1 e linearmente indipendenti è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_1 = A\underline{v}_2 = \underline{0}$.

Allo stesso modo, per determinare gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 100$ dobbiamo trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$(A - 100I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A - 100I_3 = \begin{pmatrix} -82 & 24 & -30 \\ 24 & -68 & -40 \\ -30 & -40 & -50 \end{pmatrix},$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} -82x + 24y - 30z = 0 \\ 24x - 68y - 40z = 0 \\ -30x - 40y - 50z = 0 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 41x - 12y + 15z = 0 \\ 6x - 17y - 10z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Sottraendo 3 volte la terza alla prima e aggiungendo due volte la terza alla seconda si ottiene

$$\begin{cases} 32x - 24y = 0 \\ 12x - 9y = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Le due prime equazioni sono multiple di $4x - 3y = 0$ e il sistema ha quindi come soluzioni $x = \frac{3}{4}y$ e $z = -\frac{5}{4}y$, con $y \neq 0$. Quindi gli autovettori relativi a λ_2 sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. <u>**Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_3 = 100\underline{v}_3$.**</u>

In conclusione, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori di A.

c) Esiste una base ortonormale (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Una tale base esiste certamente, perché la matrice A è simmetrica e quindi ortodiagonalizzabile. Per determinarla dobbiamo anzitutto trovare una coppia di autovettori relativi a λ_1 che siano versori tra loro ortogonali. Possiamo decidere di normalizzare $\underline{v}_1$, ossia introdurre

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{\|\underline{v}_1\|}\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}.$$

Imponendo ora l'ortogonalità tra $\underline{v}_1$ e il generico autovettore relativo a λ_1, ossia $(x, y, \frac{1}{5}(3x + 4y))$ con x e y non entrambi nulli, otteniamo l'equazione $17x + 6y = 0$, cioè l'autovettore $(x, -\frac{17}{6}x, -\frac{5}{3}x)$, con $x \neq 0$. Normalizzando anche questo vettore abbiamo che $x^2 = \frac{36}{425}$ e quindi arriviamo ad

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5\sqrt{17}} \\ -\frac{\sqrt{17}}{5} \\ -\frac{2}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda l'autovalore λ_2, basta normalizzare $\underline{v}_3 = (3, 4, -5)$, ossia introdurre

$$\underline{u}_3 = \frac{1}{\|\underline{v}_3\|}\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare (ed è anche un fatto generale) che $\underline{u}_3$ è ortogonale ad ogni autovettore relativo a λ_1. In conclusione, $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ è una base ortonormale di autovettori di A.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
9 febbraio 2011 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
Risolvere l'equazione

$$\left(z^2 + 2z + 1 + 8i\right)\left(|z^2 + 1| + 5\right) = 0$$

in forma algebrica e disegnare le sue soluzioni sul piano di Gauss.

L'equazione si presenta sotto la forma di un prodotto uguale a zero. Le soluzioni dell'equazione saranno le soluzioni di

$$z^2 + 2z + 1 + 8i = 0$$

unite alle soluzioni di

$$|z^2 + 1| + 5 = 0 \ .$$

La seconda equazione non ha soluzioni. Infatti il modulo è un numero reale positivo o nullo; quando gli si aggiunge 5 il risultato è un reale almeno uguale a 5, e quindi non nullo. La prima equazione è invece un'equazione di secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 + 8i) = -32i$$

le cui radici quadrate sono

$$\delta = \pm 4(1 - i) \ .$$

Osservazione: il numero $-32i$ ha modulo 32 e argomento $\frac{3\pi}{2}$ per cui le sue radici quadrate avranno modulo $4\sqrt{2}$ e argomento $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}$; quindi sono quelle indicate. In modo alternativo si potevano cercare le radici quadrate sotto la forma $a + ib$ e si vedeva che $a^2 = b^2$ per ciò $a = \pm b$ e $2ab = -32$ da cui $ab = -16$ quindi $a = -b$ (e non $a = b$) e per ciò $a = -b = \pm 4$.
Le soluzioni saranno quindi

$$z_1 = \frac{-2 + 4(1 - i)}{2} = 1 - 2i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-2 - 4(1 - i)}{2} = -3 + 2i \ .$$

Esercizio 2.
Determinare in quali delle seguenti famiglie i vettori sono linearmente indipendenti.

Osserviamo che per qualsiasi famiglia di vettori, determinare quanti sono linearmente indipendenti può essere fatto calcolando la caratteristica (o il rango) della matrice costituita dai loro componenti. Le soluzioni proposte qui sono diverse, verificano direttamente l'indipendenza lineare dei vettori.

a) $\left(\underline{u}_1 = (2;3;1;-5;1),\ \underline{u}_2 = (0;0;0;0;0)\right)$

I vettori sono linearmente dipendenti perché $\underline{u}_2$ è il vettore nullo.

b) $\left(\underline{v}_1 = (-1;2;4;-1),\ \underline{v}_2 = (2;-4;-5;2),\ \underline{v}_3 = (1;-2;2;1)\right)$

I vettori sono linearmente dipendenti infatti le terne $(x;y;z)$ tali che $x\underline{v}_1+y\underline{v}_2+z\underline{v}_3 = \underline{0}$ sono quelle per cui $(-x+2y+z; 2x-4y-2z; 4x-5y+2z; -x+2y+z) = (0;0;0;0)$ cioè tali che $x = 2y+z$ (nella prima) e $y+2z = 0$ (nella terza, mentre la seconda e la quarta diventano $0 = 0$) quindi $y = -2z$ e $x = -3z$; in definitiva sono tutte le terne $(-3z;-2z;z)$ tra cui $(3;2;-1)$.

c) $\left(\underline{w}_1 = (2;-1;3;4),\ \underline{w}_2 = (-1;4;-2;1),\ \underline{w}_3 = (2;3;-1;3)\right)$

I vettori sono linearmente indipendenti perché se $x\underline{w}_1 + y\underline{w}_2 + z\underline{w}_3 = \underline{0}$ allora $(2x - y+2z; -x+4y+3z; 3x-2y-z; 4x+y+3z) = (0;0;0;0)$ per cui $y = 2x+2z$ (nella prima componente) quindi $-x-5z = 0$ (nella terza) cioè $x = -5z$ e quindi $y = -8z$ si deduce (nell'ultima) $-25z = 0$ cioè $x = y = z = 0$.

Esercizio 3.
Si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \\ z = -1+3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x-y+2z+3 = 0 \\ y-z+3 = 0 \end{cases}$$

a) Determinare (se esiste) un punto di intersezione tra r ed s.

Basta inserire le equazioni di r in quelle di s ed osservare che si ottiene un sistema impossibile. Ciò significa che le due rette non si intersecano.

b) Determinare (se esiste) un piano contenente s e parallelo ad r.

Consideriamo il fascio dei piani contenenti s, ossia

$$\lambda(x-y+2z+3) + \mu(y-z+3) = 0,$$

con il suo vettore normale $\underline{n} = (\lambda, -\lambda+\mu, 2\lambda-\mu)$. Poiché $\underline{v}_r = (-2,1,3)$ è un vettore direzionale della retta r, la condizione di parallelismo è $\underline{n}\cdot\underline{v}_r = 0$, ossia $\lambda = \frac{2}{3}\mu$. Inserendo questo risultato nell'equazione del fascio di piani si ottiene l'equazione del piano cercato:

$$2x+y+z+15 = 0.$$

c) Determinare (se esiste) un piano contenente r ed ortogonale ad s.

È chiaro che se un tale piano esiste, allora le due rette sono ortogonali. Ma $\underline{v}_s = (1,-1,2) \wedge (0,1,-1) = (-1,1,1)$ e $\underline{v}_r \cdot \underline{v}_s \neq 0$, il che significa che r ed s non sono ortogonali e quindi il piano richiesto non esiste.

Esercizio 4.
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -12 & 15 \\ -12 & -16 & 20 \\ 15 & 20 & -25 \end{pmatrix}$$

a) Mostrare che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ (doppio) e $\lambda_2 = -50$ (semplice).

Abbiamo che

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -9-\lambda & -12 & 15 \\ -12 & -16-\lambda & 20 \\ 15 & 20 & -25-\lambda \end{vmatrix}$$

sottraendo $\frac{3}{4}$ della seconda riga alla prima

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{3}{4}\lambda & 0 \\ -12 & -16-\lambda & 20 \\ 15 & 20 & -25-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ -12 & -16-\lambda & 20 \\ 15 & 20 & -25-\lambda \end{vmatrix}$$

sommando $\frac{3}{4}$ della prima colonna alla seconda

$$= \lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -12 & -25-\lambda & 20 \\ 15 & \frac{125}{4} & -25-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda + 50).$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = 0$ (doppio) e $\lambda_2 = -50$ (semplice).

b) Esiste una base (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Una tale base esiste certamente, perché la matrice A è simmetrica e quindi diagonalizzabile.

Determiniamo ora tale base, calcolando gli autovettori di A. Per quanto riguarda $\lambda_1 = 0$, si tratta di trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} -9x - 12y + 15z = 0 \\ -12x - 16y + 20z = 0 \\ 15x + 20y - 25z = 0 \end{cases}$$

Tutte le equazioni sono multiple dell'equazione $3x + 4y - 5z = 0$, quindi le soluzioni cercate sono $z = \frac{1}{5}(3x + 4y)$, con x e y arbitrari (ma non entrambi nulli). Quindi una coppia di autovettori relativi a λ_1 e linearmente indipendenti è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_1 = A\underline{v}_2 = \underline{0}$.</u>

Allo stesso modo, per determinare gli autovettori relativi a $\lambda_2 = -50$ dobbiamo trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$(A + 50I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A + 50I_3 = \begin{pmatrix} 41 & -12 & 15 \\ -12 & 34 & 20 \\ 15 & 20 & 25 \end{pmatrix},$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} 41x - 12y + 15z = 0 \\ -12x + 34y + 20z = 0 \\ 15x + 20y + 25z = 0 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 41x - 12y + 15z = 0 \\ 6x - 17y - 10z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Sottraendo 3 volte la terza alla prima e aggiungendo due volte la terza alla seconda si ottiene

$$\begin{cases} 32x - 24y = 0 \\ 12x - 9y = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Le due prime equazioni sono multiple di $4x - 3y = 0$ e il sistema ha quindi come soluzioni $x = \frac{3}{4}y$ e $z = -\frac{5}{4}y$, con $y \neq 0$. Quindi gli autovettori relativi a λ_2 sono

i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. **Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_3 = -50\underline{v}_3$.**

In conclusione, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori di A.

c) Esiste una base ortonormale (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Una tale base esiste certamente, perché la matrice A è simmetrica e quindi ortodiagonalizzabile. Per determinarla dobbiamo anzitutto trovare una coppia di autovettori relativi a λ_1 che siano versori tra loro ortogonali. Possiamo decidere di normalizzare $\underline{v}_1$, ossia introdurre

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{\|\underline{v}_1\|}\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}.$$

Imponendo ora l'ortogonalità tra $\underline{v}_1$ e il generico autovettore relativo a λ_1, ossia $(x, y, \frac{1}{5}(3x + 4y))$ con x e y non entrambi nulli, otteniamo l'equazione $17x + 6y = 0$, cioè l'autovettore $(x, -\frac{17}{6}x, -\frac{5}{3}x)$, con $x \neq 0$. Normalizzando anche questo vettore abbiamo che $x^2 = \frac{36}{425}$ e quindi arriviamo ad

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5\sqrt{17}} \\ -\frac{\sqrt{17}}{5} \\ -\frac{2}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda l'autovalore λ_2, basta normalizzare $\underline{v}_3 = (3, 4, -5)$, ossia introdurre

$$\underline{u}_3 = \frac{1}{\|\underline{v}_3\|}\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare (ed è anche un fatto generale) che $\underline{u}_3$ è ortogonale ad ogni autovettore relativo a λ_1. In conclusione, $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ è una base ortonormale di autovettori di A.