Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
26 gennaio 2011 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

a) Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$\frac{z}{\bar{z}} = 2i \ .$$

Osserviamo che z non può essere nullo.

È più comodo risolvere l'equazione in forma esponenziale. Poniamo quindi $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Abbiamo allora

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = 2i$$

cioè

$$e^{2i\theta} = 2i \ .$$

Questa equazione non ha nessuna soluzione perché il numero complesso di sinistra ha modulo 1 mentre quello di destra ha modulo 2.

Quindi non ci sono soluzioni.

b) Siano gli insiemi

$$A_c = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) = c\} \ .$$

dove $c \in \mathbb{R}$. Tracciare nel piano di Gauss gli insiemi A_0, A_4 e A_{-1}.

Posto $z = x + iy$ con x e y reali, abbiamo

$$A_c = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 - y^2 = c\} \ .$$

Se $c = 0$, abbiamo

$$A_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 = y^2\}$$

cioè

$$A_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x = \pm y\} \ .$$

L'insieme A_0 è quindi l'unione delle due bisettrici degli assi.

Se $c \neq 0$, l'insieme A_c è un iperbole equilatera di asintoti le rette di A_0 e di vertici $\pm\sqrt{c}$ (se $c > 0$) e $\pm i\sqrt{-c}$ (se $c < 0$).

Esercizio 2. a) Siano $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e $W = \mathbb{R}^3$. Determinare se è lineare l'applicazione $f : V \longrightarrow W$ definita da:

$$f(P) = (P(2); P'(-1); P(1) + P''(7)) \ .$$

Sì. Infatti dati due polinomi P e Q e due reali λ e μ abbiamo $(\lambda P + \mu Q)'(x) = \lambda P'(x) + \mu Q'(x)$ per qualsiasi x nonché $(\lambda P + \mu Q)''(x) = \lambda P''(x) + \mu Q''(x)$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P(2) + \mu Q(2); \lambda P'(-1) + \mu Q'(-1); \\ &\qquad \lambda P(1) + \mu Q(1) + \lambda P''(7) + \mu Q''(7)) \\ &= (\lambda P(2); \lambda P'(-1); \lambda P(1) + \lambda P''(7)) + \\ &\qquad (\mu Q(2); \mu Q'(-1); \mu Q(1) + \mu Q''(7)) \\ &= \lambda(P(2); P'(-1); P(1) + P''(7)) + \\ &\qquad \mu(Q(2); Q'(-1); Q(1) + Q''(7)) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

b) Determinare la matrice dell'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dove $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dobbiamo calcolare le coordinate dei vettori $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Una soluzione è di calcolare le coordinate del vettore generico $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in questa base. Risolviamo quindi $x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ovvero il sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x + y = b \end{cases}$$

La seconda meno la prima dà $x = b - a$ e quindi $y = a - x = 2a - b$. (**verificare**). Calcoliamo quindi

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Usando le formula calcolate in precedenze vediamo che le coordinate del primo vettore sono $x_1 = 0$ e $y_1 = 1$, quelle del secondo $x_2 = 3$ e $y_2 = -5$ e quelle del terzo $x_3 = 1$ e $y_3 = 0$. Abbiamo quindi come matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Indicare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ quante soluzioni ha il sistema

$$\begin{cases} x + 5y \qquad\qquad - t = \ \ 2 \\ -3x - 5y \ + az + 13t = -1 \\ 2x + 2y + 24z - 10t = \ 1\ . \end{cases}$$

Per capire quante soluzioni ha il sistema usiamo il teorema di Rouché–Capelli. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema e b la colonna dei cosidetti valori noti. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & a & 13 \\ 2 & 2 & 24 & -10 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che il rango di A è al massimo 3 (perché ha 3 righe) e almeno 1 (perché il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0). Inoltre il determinante della sottomatrice costituita dalle due prime righe e colonne è uguale a 10 ed è quindi diverso da 0. Questo significa che la matrice A ha rango almeno 2.
Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarto colonna è nullo, quindi non possiamo concludere subito se la matrice A ha rango 2 o 3.
Il determinante della sottomatrice di A costituita dalle tre prime colonne è uguale a $8a+240$. Quindi per $a = -30$, il rango della matrice A è 2 e se no il rango è 3. Quando il rango di A è 3, il rango di $(A|b)$ è per forza 3 e il sistema è indeterminato con $4 - 3 = 1$ parametro. Quando invece $a = -30$, la matrice completa $(A|b)$ è di rango 3. Infatti il determinante

della matrice costituita dalle due prime colonne di A e da b è 10 quindi diverso da 0. Il sistema non ha quindi soluzioni quando $a = -30$.
Risolvere il sistema per $a = -29$.

Si può risolvere il sistema per esempio usando la prima equazione per eliminare la x dalle altre due e poi eliminando la y tra le due equazioni rimanenti. Si trova che z è uguale a $\frac{5}{4}$. Terminando i conti si trova (usando t come parametro):

$$\begin{aligned} x &= -\frac{149}{8} + 6t \\ y &= \frac{33}{8} - t \\ z &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si determini il centro (se esiste) e la forma canonica della conica di equazione

$$5x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 7y^2 - 16x + 16\sqrt{3}\,y + 24 = 0\ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x'\sqrt{3} - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}) \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 8(x'\sqrt{3} - y') + 8\sqrt{3}(x' + y'\sqrt{3}) + 24 = 0,$$

ossia $(x')^2 + 2(y')^2 + 8y' + 6 = 0$. Quest'ultima si può riscrivere come $(x')^2 + 2(y' + 2)^2 - 2 = 0$ e quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + 2 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{(x'')^2}{2} + (y'')^2 = 1.$$

Si tratta pertanto di un'ellisse, il cui centro ha coordinate $x'_C = 0$, $y'_C = -2$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = 1$, $y_C = -\sqrt{3}$.
Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 8\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
26 gennaio 2011 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

a) Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^2 + 4\overline{z} + 1 = 0$$

Non è un'equazione di secondo grado perché compare $\bar{z}$ nell'equazione. In mancanza di altre soluzioni cerchiamo z in forma algebrica, cioè $z = x + iy$ con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Allora $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ e l'equazione è quindi equivalente a

$$x^2 - y^2 + 2ixy + 4(x - iy) + 1 = 0$$

ovvero

$$x^2 - y^2 + 4x + 1 + 2i(xy - 2y) = 0\ .$$

Il complesso di sinistra ha parte reale $x^2 - y^2 + 4x + 1$ e parte immaginaria $2(xy - 2y)$ (perché x e y sono reali) quindi x e y devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0 \\ 2(xy - 2y) \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0 \\ (x - 2)y \qquad\qquad = 0\ . \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava subito che $x = 2$ o $y = 0$.

Nel caso $x = 2$, la prima equazione è equivalente a $y^2 = 13$ quindi $y = \pm\sqrt{13}$.

Nel caso $y = 0$, la prima equazione è equivalente a $x^2+4x+1 = 0$ quindi $x = -2\pm\sqrt{3}$.

Ci sono quindi quattro soluzioni $2 \pm i\sqrt{13}$ e $-2 \pm \sqrt{3}$.

b) Tracciare nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < |z - i| < 2, \arg z \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right] \right\}$$

Sia C il punto di coordinate $(0;1)$. L'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $1 < |z-i| < 2$ è una corona circolare di centro C e di raggi 1 e 2, bordi esclusi (l'origine sta sul bordo interno della corona). L'insieme A è quindi la parte dei punti di questa corona che sta al di sopra delle due rette $y = \sqrt{3}\,x$ e $y = -\sqrt{3}\,x$.

Esercizio 2. a) Siano $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e $W = \mathbb{R}^3$. Determinare se è lineare l'applicazione $f : V \longrightarrow W$ definita da:

$$f(P) = (P(1)^2; P'(2) - P''(-1); P(-1)) \,.$$

No, non è lineare in quanto, per $P(x) = x$ (che è un elemento di V), abbiamo $f(P) = (1^2; 1-0; -1) = (1;1;-1)$ e $f(2P) = (2^2; 2-0; -2) = (4;2;2) \neq 2f(P)$.

b) Determinare la matrice dell'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x - 2y + z \\ x + 2z \end{pmatrix} \end{array}$$

nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dove $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dobbiamo calcolare le coordinate dei vettori $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Una soluzione è di calcolare le coordinate del vettore generico $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in questa base. Risolviamo quindi $x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ovvero il sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x + y = b \end{cases}$$

La seconda meno la prima dà $x = b - a$ e quindi $y = a - x = 2a - b$. (**<u>verificare</u>**). Calcoliamo quindi

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Usando le formula calcolate in precedenze vediamo che le coordinate del primo vettore sono $x_1 = -1$ e $y_1 = 3$, quelle del secondo $x_2 = 2$ e $y_2 = -4$ e quelle del terzo $x_3 = 1$ e $y_3 = 0$. Abbiamo quindi come matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Indicare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ quante soluzioni ha il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 11z - 4t = 2 \\ -3x - 9y + az - 3t = -1 \\ 2x + 8y - 14z + 4t = 1 \; . \end{cases}$$

Per capire quante soluzioni ha il sistema usiamo il teorema di Rouché–Capelli. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema e b la colonna dei cosidetti valori noti. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 11 & -4 \\ -3 & -9 & a & -3 \\ 2 & 8 & -14 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che il rango di A è al massimo 3 (perché ha 3 righe) e almeno 1 (perché il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0). Inoltre il determinante della sottomatrice costituita dalle due prime righe e colonne è uguale a -15 ed è quindi diverso da 0. Questo significa che la matrice A ha rango almeno 2.
Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarto colonna è nullo, quindi non possiamo concludere subito se la matrice A ha rango 2 o 3.
Il determinante della sottomatrice di A costituita dalle tre prime colonne è uguale a $-12a+144$. Quindi per $a = 12$, il rango della matrice A è 2 e se no il rango è 3. Quando il rango di A è 3, il rango di $(A|b)$ è per forza 3 e il sistema è indeterminato con $4 - 3 = 1$ parametro. Quando invece $a = 12$, la matrice completa $(A|b)$ è di rango 3. Infatti il determinante

della matrice costituita dalle due prime colonne di A e da b è -15 quindi diverso da 0. Il sistema non ha quindi soluzioni quando $a = 12$.
Risolvere il sistema per $a = 13$.

Si può risolvere il sistema per esempio usando la prima equazione per eliminare la x dalle altre due e poi eliminando la y tra le due equazioni rimanenti. Si trova che z è uguale a $\frac{5}{4}$. Terminando i conti si trova (usando t come parametro):

$$\begin{aligned} x &= -\frac{19}{4} + 2t \\ y &= \frac{7}{2} - t \\ z &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si determini il centro (se esiste) e la forma canonica della conica di equazione

$$5x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 7y^2 + 24x - 24\sqrt{3}\,y + 64 = 0\ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x'\sqrt{3} - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}) \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 12(x'\sqrt{3} - y') - 12\sqrt{3}(x' + y'\sqrt{3}) + 64 = 0,$$

ossia $(x')^2 + 2(y')^2 - 12y' + 16 = 0$. Quest'ultima si può riscrivere come $(x')^2 + 2(y' - 3)^2 - 2 = 0$ e quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - 3 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{(x'')^2}{2} + (y'')^2 = 1.$$

Si tratta pertanto di un'ellisse, il cui centro ha coordinate $x'_C = 0$, $y'_C = 3$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = -\frac{3}{2}$, $y_C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -12\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
26 gennaio 2011 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

a) Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$|z| = z + |z - 2i| .$$

Osserviamo che le soluzioni del sistema devono soddisfare $z = |z| - |z - 2i|$ e quindi saranno per forza dei numeri reali. Poniamo quindi $z = x \in \mathbb{R}$ (è inutile ma è opportuno per ricordarsi che la parte immaginaria è nulla). Se $x \geqslant 0$, allora $|x| = x$ e quindi l'equazione è equivalente a

$$|x - 2i| = 0$$

che non ha soluzione (l'unica possibilità sarebbe $x = 2i$ ma sappiamo che x è reale). Se invece $x < 0$, abbiamo $|x| = -x$ e quindi l'equazione è equivalente a

$$-2x = |x - 2i| .$$

Siccome i due lati dell'equazione sono positivi, l'equazione è equivalente a quella ottenuta elevando i due membri al quadrato. Otteniamo

$$4x^2 = |x - 2i|^2 = x^2 + 4$$

perché x e reale quindi la parte reale di $x - 2i$ è x e la sua parte immaginaria è -2. L'ultima equazione è equivalente a $x^2 = \frac{4}{3}$ e quindi a $x = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (la radice quadrata positiva è da scartare perché $x < 0$).

L'equazione originale ha quindi come unica soluzione $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) Tracciare nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,|z^2 + 4 \text{ è un reale positivo}\} .$$

Osserviamo che se z è reale $z^2 + 4$ è reale maggiore o uguale a 4 e quindi a maggior ragione positivo, per cui $\mathbb{R}$ è incluso in A.

Se $z^2 + 4$ è reale allora z^2 è pure reale. Quindi, posto $z = x + iy$ con x e y reali, abbiamo $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ quindi se z^2 è reale allora $xy = 0$ cioè $x = 0$ o $y = 0$ (ci si poteva arrivare diversamente usando il fatto che un reale ha argomento 0 o π quindi se z^2 è reale allora z ha argomento 0, π, $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$). Abbiamo già visto il caso $y = 0$, rimane il caso $x = 0$, cioè $z = iy$. Allora $z^2 + 4 = 4 - y^2$ e quindi in questo caso $z^2 + 4$ è un reale positivo se e solo se $y^2 < 4$, cioè $-2 < y < 2$.

Quindi $A = \mathbb{R} \cup \{iy| - 2 < y < 2\}$ e la sua immagine nel piano di Gauss è l'asse delle x unione il segmento (aperto) dell'asse delle y costituito dai punti con ordinata compresa tra -2 e 2.

Esercizio 2. a) Siano $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e $W = \mathbb{R}^3$. Determinare se è lineare l'applicazione $f : V \longrightarrow W$ definita da:

$$f(P) = \left(\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \ ; \ P'(1) \ ; \ P''(1) \right) .$$

Sì è lineare. Infatti dati due polinomi P e Q e due reali λ e μ abbiamo per qualsiasi x $(\lambda P + \mu Q)'(x) = \lambda P'(x) + \mu Q'(x)$ e $(\lambda P + \mu Q)''(x) = \lambda P''(x) + \mu Q''(x)$ e

$$\int_0^1 (\lambda P + \mu Q)(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (\lambda P(t) + \mu Q(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \left(\int_0^1 (\lambda P + \mu Q)(t)\,\mathrm{d}t \ ; \ (\lambda P + \mu Q)'(1) \ ; \ (\lambda P + \mu Q)''(1) \right) \\ &= \left(\lambda \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t ; \lambda P'(1) + \mu Q'(1) ; \lambda P''(1) + \mu Q''(1) \right) \\ &= \lambda \left(\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \ ; \ P'(1) \ ; \ P''(1) \right) + \mu \left(\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t \ ; \ Q'(1) \ ; \ Q''(1) \right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \ . \end{aligned}$$

b) Determinare la matrice dell'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ x - y + 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dove $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Dobbiamo calcolare le coordinate dei vettori $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ nella base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Una soluzione è di calcolare le coordinate del vettore generico $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ in questa base. Risolviamo quindi $x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ovvero il sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x + y = b \end{cases}$$

La seconda meno la prima dà $x = b - a$ e quindi $y = a - x = 2a - b$. (**<u>verificare</u>**). Calcoliamo quindi

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Usando le formula calcolate in precedenze vediamo che le coordinate del primo vettore sono $x_1 = -2$ e $y_1 = 5$, quelle del secondo $x_2 = 1$ e $y_2 = -3$ e quelle del terzo $x_3 = 1$ e $y_3 = 0$. Abbiamo quindi come matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Indicare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ quante soluzioni ha il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -3x + y + az - 5t = -1 \\ 2x - 10z + 4t = 1\ . \end{cases}$$

Per capire quante soluzioni ha il sistema usiamo il teorema di Rouché–Capelli. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema e b la colonna dei cosidetti valori noti. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & a & -5 \\ 2 & 0 & -10 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che il rango di A è al massimo 3 (perché ha 3 righe) e almeno 1 (perché il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0). Inoltre il determinante della sottomatrice costituita dalle due prime righe e colonne è uguale a -5 ed è quindi diverso da 0. Questo significa che la matrice A ha rango almeno 2.
Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarto colonna è nullo, quindi non possiamo concludere subito se la matrice A ha rango 2 o 3.
Il determinante della sottomatrice di A costituita dalle tre prime colonne è uguale a $-4a+48$. Quindi per $a = 12$, il rango della matrice A è 2 e se no il rango è 3. Quando il rango di A è 3, il rango di $(A|b)$ è per forza 3 e il sistema è indeterminato con $4-3 = 1$ parametro. Quando invece $a = 12$, la matrice completa $(A|b)$ è di rango 3. Infatti il determinante della matrice costituita dalle due prime colonne di A e da b è -5 quindi diverso da 0. Il sistema non ha quindi soluzioni quando $a = 12$.
Risolvere il sistema per $a = 13$.

Si può risolvere il sistema per esempio usando la prima equazione per eliminare la x dalle altre due e poi eliminando la y tra le due equazioni rimanenti. Si trova che z è uguale a $\frac{5}{4}$. Terminando i conti si trova (usando t come parametro):

$$\begin{aligned} x &= \frac{27}{4} - 2t \\ y &= 3 - t \\ z &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si determini il centro (se esiste) e la forma canonica della conica di equazione

$$5x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 7y^2 + 8x - 8\sqrt{3}\,y = 0\ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}\ .$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\ , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x'\sqrt{3} - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}) \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 4(x'\sqrt{3} - y') - 4\sqrt{3}(x' + y'\sqrt{3}) = 0,$$

ossia $(x')^2 + 2(y')^2 - 4y' = 0$. Quest'ultima si può riscrivere come $(x')^2 + 2(y'-1)^2 - 2 = 0$ e quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - 1 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{(x'')^2}{2} + (y'')^2 = 1.$$

Si tratta pertanto di un'ellisse, il cui centro ha coordinate $x'_C = 0$, $y'_C = 1$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = -\frac{1}{2}$, $y_C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
26 gennaio 2011 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

a) Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = |z| \ .$$

Poniamo $z = x + iy$ con x e y reali. Come primo passo verifichiamo che o x o y è uguale a 0. Ci sono (almeno) due modi di procedere.

- Il primo è di osservare che $|x|$, $|y|$ e $|z|$ sono le lunghezze dei tre lati di un triangolo rettangolo (di vertici 0, z e la proiezione di z sull'asse delle ascissi). Il cateto ha lunghezza uguale alla somma dei due altri lati solo se il triangolo è piatto, cioè solo se $x = 0$ oppure $y = 0$.
- Algebricamente invece, l'equazione è equivalente a $|x| + |y| = \sqrt{x^2 + y^2}$ che implica $x^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2 = x^2 + y^2$ e quindi $|x| \cdot |y| = 0$, cioè $x = 0$ o $y = 0$.

Ora, se $x = 0$, allora $z = iy$ e si vede subito che l'equazione è soddisfatta.

Nello stesso modo se $y = 0$ allora $z = x$ e l'equazione è di nuovo ovviamente soddisfata.

L'equazione ha quindi come soluzione i reali e gli immaginari puri, cioè i complessi $z = x$ e $z = iy$ con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

b) Tracciare nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - 1 - 2i| = |z + 1 - 3i|\}$$

Sappiamo che se z_1 e z_2 sono due complessi, allora $|z_1 - z_2|$ è la distanza tra i due punti che rappresentano z_1 e z_2 nel piano di Gauss.

Siano P_1 e P_2 i due punti nel piano di Gauss di coodinate $(1;2)$ e $(-1;3)$ quindi i due punti che rappresentano $1+2i$ e $-1+3i$. Allora se M rappresenta il complesso z nel piano di Gauss, $|z-1-2i|$ è la distanza $\overline{MP_1}$ e $|z+1-3i|$ è la distanza $\overline{MP_2}$. Abbiamo quindi $|z-1-2i| = |z+1-3i|$ se e solo se M è equidistante da P_1 e P_2 cioè se M è sull'asse del segmento $[P_1;P_2]$. L'insieme A è quindi tale asse.

Si poteva portare z in forma algebrica $z = x+iy$ e risolvere $|z-1-2i|^2 = |z+1-3i|^2$ (che è equivalente a l'equazione iniziale perché i moduli sono positivi o nulli) e si trovava un'equazione cartesiana di tale asse, ossia $4x-2y+5=0$.

Esercizio 2. a) Siano $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e $W = \mathbb{R}^3$. Determinare se è lineare l'applicazione $f : V \longrightarrow W$ definita da:

$$f(P) = (P(0)+P(2); P(0)+2P''(0)^2; P'(-1)) .$$

No, non è lineare. Infatti, preso $P(x) = x^2$ (che sta in V) abbiamo $P'(x) = 2x$ e $P''(x) = 2$ per cui $P''(0) = 2$ e quindi $f(P) = (4;4;-2)$ e $f(2P) = (8;32;-4) \neq 2f(P)$.

b) Determinare la matrice dell'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 4x-2y+z \\ x-2y+2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dove $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dobbiamo calcolare le coordinate dei vettori $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Una soluzione è di calcolare le coordinate del vettore generico $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in questa base. Risolviamo quindi $x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ovvero il sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x + y = b \end{cases}$$

La seconda meno la prima dà $x = b - a$ e quindi $y = a - x = 2a - b$. (**verificare**). Calcoliamo quindi

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Usando le formula calcolate in precedenze vediamo che le coordinate del primo vettore sono $x_1 = -3$ e $y_1 = 7$, quelle del secondo $x_2 = 0$ e $y_2 = -2$ e quelle del terzo $x_3 = 1$ e $y_3 = 0$. Abbiamo quindi come matrice

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Indicare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ quante soluzioni ha il sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z - t = 2 \\ -3x - 4y + az + 8t = -1 \\ 2x + 2y + 14z - 6t = 1 \ . \end{cases}$$

Per capire quante soluzioni ha il sistema usiamo il teorema di Rouché–Capelli. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema e b la colonna dei cosidetti valori noti. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & a & 8 \\ 2 & 2 & 14 & -6 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che il rango di A è al massimo 3 (perché ha 3 righe) e almeno 1 (perché il coefficiente in alto a sinistra è diverso da 0). Inoltre il determinante della sottomatrice costituita dalle due prime righe e colonne è uguale a 5 ed è quindi diverso da 0. Questo significa che la matrice A ha rango almeno 2.
Il determinante della sottomatrice di A costituita dalla prima, seconda e quarto colonna è nullo, quindi non possiamo concludere subito se la matrice A ha rango 2 o 3.
Il determinante della sottomatrice di A costituita dalle tre prime colonne è uguale a $4a+72$. Quindi per $a = -18$, il rango della matrice A è 2 e se no il rango è 3. Quando il rango di A è 3, il rango di $(A|b)$ è per forza 3 e il sistema è indeterminato con $4 - 3 = 1$ parametro. Quando invece $a = -18$, la matrice completa $(A|b)$ è di rango 3. Infatti il determinante

della matrice costituita dalle due prime colonne di A e da b è 5 quindi diverso da 0. Il sistema non ha quindi soluzioni quando $a = -18$.
Risolvere il sistema per $a = -17$.

Si può risolvere il sistema per esempio usando la prima equazione per eliminare la x dalle altre due e poi eliminando la y tra le due equazioni rimanenti. Si trova che z è uguale a $\frac{5}{4}$. Terminando i conti si trova (usando t come parametro):

$$x = -\frac{51}{4} + 4t$$
$$y = \frac{9}{2} - t$$
$$z = \frac{5}{4}$$

Esercizio 4. Si determini il centro (se esiste) e la forma canonica della conica di equazione

$$5x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 7y^2 - 8x + 8\sqrt{3}\,y = 0\ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $-2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 8$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\ , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x'\sqrt{3} - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}) \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 4(x'\sqrt{3} - y') + 4\sqrt{3}(x' + y'\sqrt{3}) = 0,$$

ossia $(x')^2 + 2(y')^2 + 4y' = 0$. Quest'ultima si può riscrivere come $(x')^2 + 2(y'+1)^2 - 2 = 0$ e quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + 1 \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{(x'')^2}{2} + (y'')^2 = 1.$$

Si tratta pertanto di un'ellisse, il cui centro ha coordinate $x'_C = 0$, $y'_C = -1$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = \frac{1}{2}$, $y_C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$