Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
3 settembre 2010 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano r e s le rette descritte da

$$r : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 3x + 5y + 4z - 7 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -4 + t \end{cases}$$

a) Verificare che r e s sono complanari e determinare un'equazione del piano che le contiene.

Sappiamo che due rette intersecanti sono complanari, vista la domanda **??**, calcoliamo le coordinate del punto di intersezione P di r e s. Per ciò inseriamo i valori di x, y e z dati dall'equazione di s nelle equazioni di r, il sistema è

$$\begin{cases} 4t - 4 = 0 \\ 15t - 15 = 0 \end{cases}$$

ovvero $t = 1$. Nell'equazione di s si trova $P(3; 2; -3)$.

In brutta copia si verifica che le coordinate di P soddisfano entrambe le equazioni di r.

Quindi le rette r e s sono intersecanti e perciò complanari.

Per determinare l'equazione del piano che le contiene troviamo un vettore normale al piano. Possiamo determinare un vettore direttore della retta r facendo il prodotto vettoriale di vettori normali ai due piani che la definiscono (si potrebbe anche determinare un punto A di r e usare il vettore $\overrightarrow{AP}$). Un vettore direttore di r ha coordinate

$$\underline{u} = (1; 1; -2)$$

e quindi un'equazione del piano che contiene r e s è data da

$$\pi : 3x - 5y - z - 2 = 0$$

dove i coefficienti di x, y e z sono proporzionali ai coefficienti del vettore prodotto vettoriale di $\underline{u}$ e $\underline{v} = (2;1;1)$ che è il vettore direttore di s.

In brutta copia si verifica che le coordinate di P e le coordinate del punto di s con $t = 0$ soddisfano l'equazione di π.

Era possibile svolgere questa domanda in modo diverso: si poteva determinare il piano del fascio di piani di sostegno r che conteneva il punto $B(1;1;-4)$ (che è il punto di s con $t = 0$) e verificare che la retta s era interamente conenuta in tale piano.

b) Verificare che la retta

$$\rho : \begin{cases} x = -7 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -13 - 7t \end{cases}$$

è complanare con r e s.

Basta inserire i valori di x, y e z date dalle equazioni di ρ nell'equazione di π per verificare che tale equazione è verificata per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e quindi che ρ è inclusa nel piano π.

c) Determinare il punto di intersezione P di r e s.

Abbiamo già visto che

$$P(3;2;-3).$$

d) Determinare il punto di intersezione Q di r e ρ.

Procedendo come nella prima domanda si trova $t = -2$ e

$$Q(1;0;1).$$

In brutta copia si verifica che le coordinate di Q soddisfano l'equazione di π.

e) Determinare il punto di intersezione S di ρ e s.

Sappiamo che le due rette s e ρ sono complanari quindi o hanno un punto di intersezione o sono parallele, siccome è abbastanza ovvio che non sono parallele hanno per forza un punto di intersezione. Qualunque siano gli errori di calcolo sappiamo che dobbiamo trovare un punto di intersezione.

Uguagliamo le espressioni di x, y e z e troviamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 + 2t = -7 - 4w \\ 1 + t = -2 - w \\ -4 + t = -13 - 7w \end{cases}$$

(abbiamo usato due parametri diversi perché nessuno garantisce che il valore del parametro che conviene in s sia lo stesso di quello che conviene in ρ). Non è particolarmente difficile vedere che questo sistema ammette un'unica soluzione $t = -2$, $w = -1$ che dà come intersezione

$$S(-3; -1; -6).$$

<u>È caldamente suggerito di verificare in brutta copia che le coordinate di S soddisfano l'equazione di π.</u>

Esercizio 2. Sia dato il sistema, dipendente di un parametro reale t,

$$\begin{cases} (t+1)x - y + 5z = 18 \\ 2x + y + z \qquad\quad = 3 \\ x - 2y + (t+8)z = 29 \end{cases}$$

a) Determinare al variare del parametro t il numero di soluzioni del sistema.

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & t+8 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante è caldamente consigliato usare l'1 in centro alla matrice. Usiamo quindi la seconda riga per far comparire degli zeri nella prima e nella terza riga.

$$\det A = \begin{vmatrix} t+3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & t+10 \end{vmatrix} = (t+3)(t+10) - (5)(6) = t^2 + 13t$$

Quindi per t diverso da zero e da -13 il determinante di A è diverso da zero quindi la matrice A è di caratteristica (o rango) 3 e il sistema è determinato.

È immediato osservare che la sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante $-5 \neq 0$ e quindi la matrice A ha caratteristica (o rango) almeno 2. Pe ciò la matrice A ha caratteristica (o rango) 2 quando $t = 0$ o -13.

Dal teorema di Kronecker, per determinare la caratteristica della matrice completa, basta calcolare il determinante della matrice costituita dalle due prime colonne di A e della colonna dei termini noti. Tale determinante con $t = 0$ risulta uguale a 0 quindi dal teorema di Rouché–Capelli il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni per $t = 0$. Invece il determinante con $t = -13$ risulta uguale a -455 e quindi, sempre dal teorema di Rouché–Capelli il sistema è impossibile.

b) Determinare l'insieme delle soluzioni quando il sistema <u>non è</u> determinato.

L'unico caso da considerare è il caso in cui $t = 0$. Possiamo limitarci alle due ultime equazioni (perché il determinante 2×2 in basso a sinistra è diverso da 2) e usare z come parametro. Senza nessuna difficoltà si trova che

$$\begin{cases} x = -2z + 7 \\ y = 3z - 11 \end{cases}$$

per cui l'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \{(-2z + 7, 3z - 11, z) | z \in \mathbb{R}\} \ .$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione

$$\left(z^4 + 3 + i\sqrt{3}\right)(z\overline{z} + 1 + i) = 0.$$

Il prodotto di due complessi è nullo se e solo se uno dei due è nullo. Quindi le soluzioni dell'equazione saranno le soluzioni dell'equazione

$$z^4 + 3 + i\sqrt{3} = 0$$

unite alle soluzioni dell'equazione

$$z\overline{z} + 1 + i = 0 \ .$$

Osserviamo che quest'ultima non ha nessuna soluzione perché qualunque sia il complesso z, il numero $z\overline{z}$ è un reale quindi $z\overline{z} + 1 + i$ ha una parte immaginaria non nulla.
Ci rimane da trovare le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = -3 - i\sqrt{3}$$

ossia le radici quarte di $w = -3 - i\sqrt{3}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} |w|^2 &= 3^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12 = 3 \cdot 4 \\ |w| &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

e, se denotiamo θ l'argomento di w,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $\theta = -\frac{5\pi}{6}$.
Le radici quarte di w avranno quindi modulo uguale a $\sqrt[8]{12}$ e argomento $-\frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.
L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[8]{12} e^{\left(-\frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right)i} \ \middle| \ 0 \leqslant k \leqslant 3 \right\}$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione data da

$$f(P) = 3P'(x) + P(-2)(x^2 - 1) \ .$$

a) Dimostrare che l'applicazione f è lineare.

Siano P e Q due polinomi. Sappiamo che $(P+Q)' = P' + Q'$ e, se λ è un reale allora $(\lambda P)' = \lambda P'$. È quindi facile dimostrare la linearità di f: siano P e Q due polinomi (di grado al massimo 3) e λ e μ due reali, allora

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= 3(\lambda P + \mu Q)'(x) + (\lambda P + \mu Q)(-2)(x^2 - 1) \\ &= 3\big((\lambda P)' + (\mu Q)'\big)(x) + \\ &\qquad (\lambda P(-2) + \mu Q(-2))(x^2 - 1) \\ &= 3\big(\lambda P' + \mu Q'\big)(x) + \\ &\qquad \lambda P(-2)(x^2 - 1) + \mu Q(-2)(x^2 - 1) \\ &= 3\lambda P'(x) + 3\mu Q'(x) + \\ &\qquad \lambda P(-2)(x^2 - 1) + \mu Q(-2)(x^2 - 1) \\ &= \lambda\big(3P'(x) + P(-2)(x^2 - 1)\big) + \\ &\qquad \mu\big(3Q'(x) + Q(-2)(x^2 - 1)\big) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

quindi f è lineare.

b) Calcolare la matrice dell'applicazione f nella base data dai vettori $\{1, x, x^2, x^3\}$ come base di partenza e $\mathcal{B} = \{1, 2x^2 - x, x^2 - 1\}$ come base di arrivo.

Dobbiamo trovare le coordinate dei vettori $f(1)$, $f(x)$, $f(x^2)$ e $f(x^3)$ nella base $\mathcal{B}$. Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \cdot 0 + 1(x^2 - 1) = x^2 - 1 \\ f(x) &= 3 \cdot 1 - 2(x^2 - 1) = -2x^2 + 5 \\ f(x^2) &= 3 \cdot (2x) + 4(x^2 - 1) = 4x^2 + 6x - 4 \\ f(x^3) &= 3 \cdot (3x^2) - 8(x^2 - 1) = x^2 + 8 \end{aligned}$$

Per ciascuno dei quattro vettori $ax^2 + bx + c$ trovati sopra dovremo determinare i reali α, β e γ tali che $\alpha \cdot 1 + \beta(2x^2 - x) + \gamma(x^2 - 1) = ax^2 + bx + c$, cioè tali che $(2\beta + \gamma)x^2 - \beta x + \alpha - \gamma = ax^2 + bx + c$. Dovremo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\beta + \gamma = a \\ -\beta \qquad = b \\ \alpha - \gamma \ = c \end{cases}$$

Dalla seconda si determina immediatamente che $\beta = -b$ quindi nella prima si trova $\gamma = a - 2\beta = a + 2b$ e quindi nella terza $\alpha = \gamma + c = a + 2b + c$. La matrice di f risulta allora essere

$$M = \begin{pmatrix} 1+2\cdot 0-1 & -2+2\cdot 0+5 & 4+2\cdot 6-4 & 1+2\cdot 0+8 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 1+2\cdot 0 & -2+2\cdot 0 & 4+2\cdot 6 & 1+2\cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$8x^2 - 5y^2 - 5z^2 - 6yz - 32x + 8\sqrt{2}(y+z) + 16 = 0 \ .$$

Determinare la forma canonica di σ, riconoscere di che quadrica si tratta e scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & -5 & -3 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -3 & -5 & 4\sqrt{2} \\ -16 & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 16 \end{pmatrix} \ .$$

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \ .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -8$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} ,$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1|\underline{v}_2|\underline{v}_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z') \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-y' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione della quadrica nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 - 32x' + 16z' + 16 = 0,$$

ossia

$$4(x')^2 - (y')^2 - 4(z')^2 - 16x' + 8z' + 8 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' - 2 \\ Y = y' \\ Z = z' - 1 \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} - Z^2 = 1.$$

Essa è pertanto un iperboloide ellittico (o a due falde).
Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + Z + 1) \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-Y + Z + 1) \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
3 settembre 2010 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano r e s le rette descritte da

$$r : \begin{cases} 3x + 3y + z - 4 = 0 \\ 2x + 7y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2t \\ z = -6 + t \end{cases}$$

a) Verificare che r e s sono complanari e determinare un'equazione del piano che le contiene.

Sappiamo che due rette intersecanti sono complanari, vista la domanda **??**, calcoliamo le coordinate del punto di intersezione P di r e s. Per ciò inseriamo i valori di x, y e z dati dall'equazione di s nelle equazioni di r, il sistema è

$$\begin{cases} t - 1 = 0 \\ -11t + 11 = 0 \end{cases}$$

ovvero $t = 1$. Nell'equazione di s si trova $P(5; -2; -5)$.

In brutta copia si verifica che le coordinate di P soddisfano entrambe le equazioni di r.

Quindi le rette r e s sono intersecanti e perciò complanari.

Per determinare l'equazione del piano che le contiene troviamo un vettore normale al piano. Possiamo determinare un vettore direttore della retta r facendo il prodotto vettoriale di vettori normali ai due piani che la definiscono (si potrebbe anche determinare un punto A di r e usare il vettore $\overrightarrow{AP}$). Un vettore direttore di r ha coordinate

$$\underline{u} = (2; -1; -3)$$

e quindi un'equazione del piano che contiene r e s è data da

$$\pi : 7x + 8y + 2z - 9 = 0$$

dove i coefficienti di x, y e z sono proporzionali ai coefficienti del vettore prodotto vettoriale di $\underline{u}$ e $\underline{v} = (2; -2; 1)$ che è il vettore direttore di s.

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di P e le coordinate del punto di s con $t = 0$ soddisfano l'equazione di π.</u>

Era possibile svolgere questa domanda in modo diverso: si poteva determinare il piano del fascio di piani di sostegno r che conteneva il punto $B(3; 0; -6)$ (che è il punto di s con $t = 0$) e verificare che la retta s era interamente conenuta in tale piano.

b) Verificare che la retta

$$\rho : \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 8 + 4t \\ z = -17 - 9t \end{cases}$$

è complanare con r e s.

Basta inserire i valori di x, y e z date dalle equazioni di ρ nell'equazione di π per verificare che tale equazione è verificata per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e quindi che ρ è inclusa nel piano π.

c) Determinare il punto di intersezione P di r e s.

Abbiamo già visto che

$$P(5; -2; -5).$$

d) Determinare il punto di intersezione Q di r e ρ.

Procedendo come nella prima domanda si trova $t = -2$ e

$$Q(1; 0; 1).$$

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di Q soddisfano l'equazione di π.</u>

e) Determinare il punto di intersezione S di ρ e s.

Sappiamo che le due rette s e ρ sono complanari quindi o hanno un punto di intersezione o sono parallele, siccome è abbastanza ovvio che non sono parallele hanno per forza un punto di intersezione. Qualunque siano gli errori di calcolo sappiamo che <u>dobbiamo</u> trovare un punto di intersezione.

Uguagliamo le espressioni di x, y e z e troviamo il sistema:

$$\begin{cases} 3 + 2t &= -3 - 2w \\ -2t &= 8 + 4w \\ -6 + t &= -17 - 9w \end{cases}$$

(abbiamo usato due parametri diversi perché nessuno garantisce che il valore del parametro che conviene in s sia lo stesso di quello che conviene in ρ). Non è particolarmente difficile vedere che questo sistema ammette un'unica soluzione $t = -2$, $w = -1$ che dà come intersezione

$$S(-1; 4; -8).$$

<u>È caldamente suggerito di verificare in brutta copia che le coordinate di S soddisfano l'equazione di π.</u>

Esercizio 2. Sia dato il sistema, dipendente di un parametro reale t,

$$\begin{cases} (t+1)x + y - z &= -4 \\ 3x + y + 3z &= 10 \\ 2x + y + (t+1)z &= 3 \end{cases}$$

a) Determinare al variare del parametro t il numero di soluzioni del sistema.

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante è caldamente consigliato usare l'1 in centro alla matrice. Usiamo quindi la seconda riga per far comparire degli zeri nella prima e nella terza riga.

$$\det A = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t-2) - (-1)(-4) = t^2 - 4t$$

Quindi per t diverso da zero e da 4 il determinante di A è diverso da zero quindi la matrice A è di caratteristica (o rango) 3 e il sistema è determinato.

È immediato osservare che la sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante $1 \neq 0$ e quindi la matrice A ha caratteristica (o rango) almeno 2. Pe ciò la matrice A ha caratteristica (o rango) 2 quando $t = 0$ o 4.

Dal teorema di Kronecker, per determinare la caratteristica della matrice completa, basta calcolare il determinante della matrice costituita dalle due prime colonne di A e della colonna dei termini noti. Tale determinante con $t = 0$ risulta uguale a 0 quindi dal teorema di Rouché–Capelli il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni per $t = 0$. Invece il determinante con $t = 4$ risulta uguale a -28 e quindi, sempre dal teorema di Rouché–Capelli il sistema è impossibile.

b) Determinare l'insieme delle soluzioni quando il sistema <u>non è</u> determinato.

L'unico caso da considerare è il caso in cui $t = 0$. Possiamo limitarci alle due ultime equazioni (perché il determinante 2×2 in basso a sinistra è diverso da 2) e usare z come parametro. Senza nessuna difficoltà si trova che

$$\begin{cases} x = -2z + 7 \\ y = 3z - 11 \end{cases}$$

per cui l'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \{(-2z + 7, 3z - 11, z) | z \in \mathbb{R}\} .$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione

$$\left(z^4 - 3 + i\sqrt{3}\right)(z\overline{z} + 2 - i) = 0.$$

Il prodotto di due complessi è nullo se e solo se uno dei due è nullo. Quindi le soluzioni dell'equazione saranno le soluzioni dell'equazione

$$z^4 - 3 + i\sqrt{3} = 0$$

unite alle soluzioni dell'equazione

$$z\overline{z} + 2 - i = 0 .$$

Osserviamo che quest'ultima non ha nessuna soluzione perché qualunque sia il complesso z, il numero $z\overline{z}$ è un reale quindi $z\overline{z} + 2 - i$ ha una parte immaginaria non nulla.
Ci rimane da trovare le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = 3 - i\sqrt{3}$$

ossia le radici quarte di $w = 3 - i\sqrt{3}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} |w|^2 &= 3^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12 = 3 \cdot 4 \\ |w| &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

e, se denotiamo θ l'argomento di w,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $\theta = -\frac{\pi}{6}$.
Le radici quarte di w avranno quindi modulo uguale a $\sqrt[8]{12}$ e argomento $-\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.
L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[8]{12}e^{\left(-\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right)i} \;\middle|\; 0 \leqslant k \leqslant 3 \right\}$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione data da

$$f(P) = P'(x) + P(-2)(x^2 - 1) \ .$$

a) Dimostrare che l'applicazione f è lineare.

Siano P e Q due polinomi. Sappiamo che $(P+Q)' = P' + Q'$ e, se λ è un reale allora $(\lambda P)' = \lambda P'$. È quindi facile dimostrare la linearità di f: siano P e Q due polinomi (di grado al massimo 3) e λ e μ due reali, allora

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)'(x) + (\lambda P + \mu Q)(-2)(x^2 - 1) \\
&= \big((\lambda P)' + (\mu Q)'\big)(x) + \\
&\qquad\qquad (\lambda P(-2) + \mu Q(-2))(x^2 - 1) \\
&= \big(\lambda P' + \mu Q'\big)(x) + \\
&\qquad\qquad \lambda P(-2)(x^2 - 1) + \mu Q(-2)(x^2 - 1) \\
&= \lambda P'(x) + \mu Q'(x) + \\
&\qquad\qquad \lambda P(-2)(x^2 - 1) + \mu Q(-2)(x^2 - 1) \\
&= \lambda\big(P'(x) + P(-2)(x^2 - 1)\big) + \\
&\qquad\qquad \mu\big(Q'(x) + Q(-2)(x^2 - 1)\big) \\
&= \lambda f(P) + \mu f(Q)
\end{aligned}$$

quindi f è lineare.

b) Calcolare la matrice dell'applicazione f nella base data dai vettori $\{1, x, x^2, x^3\}$ come base di partenza e $\mathcal{B} = \{1, 2x^2 - x, x^2 - 1\}$ come base di arrivo.

Dobbiamo trovare le coordinate dei vettori $f(1)$, $f(x)$, $f(x^2)$ e $f(x^3)$ nella base $\mathcal{B}$. Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 \cdot 0 + 1(x^2 - 1) = x^2 - 1 \\
f(x) &= 1 \cdot 1 - 2(x^2 - 1) = -2x^2 + 3 \\
f(x^2) &= 1 \cdot (2x) + 4(x^2 - 1) = 4x^2 + 2x - 4 \\
f(x^3) &= 1 \cdot (3x^2) - 8(x^2 - 1) = -5x^2 + 8
\end{aligned}$$

Per ciascuno dei quattro vettori $ax^2 + bx + c$ trovati sopra dovremo determinare i reali α, β e γ tali che $\alpha \cdot 1 + \beta(2x^2 - x) + \gamma(x^2 - 1) = ax^2 + bx + c$, cioè tali che $(2\beta + \gamma)x^2 - \beta x + \alpha - \gamma = ax^2 + bx + c$. Dovremo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\beta + \gamma = a \\ -\beta \qquad = b \\ \alpha - \gamma \ = c \end{cases}$$

Dalla seconda si determina immediatamente che $\beta = -b$ quindi nella prima si trova $\gamma = a - 2\beta = a + 2b$ e quindi nella terza $\alpha = \gamma + c = a + 2b + c$. La matrice di f risulta allora essere

$$
\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} 1+2\cdot 0-1 & -2+2\cdot 0+3 & 4+2\cdot 2-4 & -5+2\cdot 0+8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1+2\cdot 0 & -2+2\cdot 0 & 4+2\cdot 2 & -5+2\cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 8 & -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Esercizio 5. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$8x^2 - 5y^2 - 5z^2 - 6yz + 16x + 8\sqrt{2}(y+z) - 8 = 0 \ .$$

Determinare la forma canonica di σ, riconoscere di che quadrica si tratta e scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & -3 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -3 & -5 & 4\sqrt{2} \\ 8 & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -8 \end{pmatrix} \ .$$

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \ .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -8$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix},$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \big(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z') \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-y' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione della quadrica nella forma

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + 16x' + 16z' - 8 = 0,$$

ossia

$$4(x')^2 - (y')^2 - 4(z')^2 + 8x' + 8z' - 4 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' \\ Z = z' - 1 \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} - Z^2 = 1.$$

Essa è pertanto un iperboloide ellittico (o a due falde).
Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + Z + 1) \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-Y + Z + 1) \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
3 settembre 2010 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano r e s le rette descritte da

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z - 3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

a) Verificare che r e s sono complanari e determinare un'equazione del piano che le contiene.

Sappiamo che due rette intersecanti sono complanari, vista la domanda **??**, calcoliamo le coordinate del punto di intersezione P di r e s. Per ciò inseriamo i valori di x, y e z dati dall'equazione di s nelle equazioni di r, il sistema è

$$\begin{cases} 3t - 3 = 0 \\ 6t - 6 = 0 \end{cases}$$

ovvero $t = 1$. Nell'equazione di s si trova $P(5; -2; 3)$.

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di P soddisfano entrambe le equazioni di r.</u>

Quindi le rette r e s sono intersecanti e perciò complanari.

Per determinare l'equazione del piano che le contiene troviamo un vettore normale al piano. Possiamo determinare un vettore direttore della retta r facendo il prodotto vettoriale di vettori normali ai due piani che la definiscono (si potrebbe anche determinare un punto A di r e usare il vettore $\overrightarrow{AP}$). Un vettore direttore di r ha coordinate

$$\underline{u} = (2; -1; 1)$$

e quindi un'equazione del piano che contiene r e s è data da

$$\pi : y + z - 1 = 0$$

dove i coefficienti di x, y e z sono proporzionali ai coefficienti del vettore prodotto vettoriale di $\underline{u}$ e $\underline{v} = (1; 1; -1)$ che è il vettore direttore di s.

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di P e le coordinate del punto di s con $t = 0$ soddisfano l'equazione di π.</u>

Era possibile svolgere questa domanda in modo diverso: si poteva determinare il piano del fascio di piani di sostegno r che conteneva il punto $B(4; -3; 4)$ (che è il punto di s con $t = 0$) e verificare che la retta s era interamente conenuta in tale piano.

b) Verificare che la retta

$$\rho : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -10 - 5t \\ z = 11 + 5t \end{cases}$$

è complanare con r e s.

Basta inserire i valori di x, y e z date dalle equazioni di ρ nell'equazione di π per verificare che tale equazione è verificata per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e quindi che ρ è inclusa nel piano π.

c) Determinare il punto di intersezione P di r e s.

Abbiamo già visto che

$$P(5; -2; 3).$$

d) Determinare il punto di intersezione Q di r e ρ.

Procedendo come nella prima domanda si trova $t = -2$ e

$$Q(1; 0; 1).$$

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di Q soddisfano l'equazione di π.</u>

e) Determinare il punto di intersezione S di ρ e s.

Sappiamo che le due rette s e ρ sono complanari quindi o hanno un punto di intersezione o sono parallele, siccome è abbastanza ovvio che non sono parallele hanno per forza un punto di intersezione. Qualunque siano gli errori di calcolo sappiamo che <u>dobbiamo</u> trovare un punto di intersezione.

Uguagliamo le espressioni di x, y e z e troviamo il sistema:

$$\begin{cases} 4 + t &= 3 + w \\ -3 + t &= -10 - 5w \\ 4 - t &= 11 + 5w \end{cases}$$

(abbiamo usato due parametri diversi perché nessuno garantisce che il valore del parametro che conviene in s sia lo stesso di quello che conviene in ρ). Non è particolarmente difficile vedere che questo sistema ammette un'unica soluzione $t = -2$, $w = -1$ che dà come intersezione

$$S(2; -5; 6).$$

È caldamente suggerito di verificare in brutta copia che le coordinate di S soddisfano l'equazione di π.

Esercizio 2. Sia dato il sistema, dipendente di un parametro reale t,

$$\begin{cases} (t+1)x - 2y + 8z &= 29 \\ 3x + y + 3z &= 10 \\ 2x - 3y + (t+13)z &= 47 \end{cases}$$

a) Determinare al variare del parametro t il numero di soluzioni del sistema.

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & t+13 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante è caldamente consigliato usare l'1 in centro alla matrice. Usiamo quindi la seconda riga per far comparire degli zeri nella prima e nella terza riga.

$$\det A = \begin{vmatrix} t+7 & 0 & 14 \\ 3 & 1 & 3 \\ 11 & 0 & t+22 \end{vmatrix} = (t+7)(t+22) - (11)(14) = t^2 + 29t$$

Quindi per t diverso da zero e da -29 il determinante di A è diverso da zero quindi la matrice A è di caratteristica (o rango) 3 e il sistema è determinato.

È immediato osservare che la sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante $-11 \neq 0$ e quindi la matrice A ha caratteristica (o rango) almeno 2. Pe ciò la matrice A ha caratteristica (o rango) 2 quando $t = 0$ o -29.

Dal teorema di Kronecker, per determinare la caratteristica della matrice completa, basta calcolare il determinante della matrice costituita dalle due prime colonne di A e della colonna dei termini noti. Tale determinante con $t = 0$ risulta uguale a 0 quindi dal teorema di Rouché–Capelli il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni per $t = 0$. Invece il determinante con $t = -29$ risulta uguale a -2233 e quindi, sempre dal teorema di Rouché–Capelli il sistema è impossibile.

b) Determinare l'insieme delle soluzioni quando il sistema <u>non è</u> determinato.

L'unico caso da considerare è il caso in cui $t = 0$. Possiamo limitarci alle due ultime equazioni (perché il determinante 2×2 in basso a sinistra è diverso da 2) e usare z come parametro. Senza nessuna difficoltà si trova che

$$\begin{cases} x = -2z + 7 \\ y = 3z - 11 \end{cases}$$

per cui l'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \{(-2z + 7, 3z - 11, z) | z \in \mathbb{R}\} \ .$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione

$$\left(z^4 + 3 - i\sqrt{3}\right)(z\overline{z} + 3 + 2i) = 0.$$

Il prodotto di due complessi è nullo se e solo se uno dei due è nullo. Quindi le soluzioni dell'equazione saranno le soluzioni dell'equazione

$$z^4 + 3 - i\sqrt{3} = 0$$

unite alle soluzioni dell'equazione

$$z\overline{z} + 3 + 2i = 0 \ .$$

Osserviamo che quest'ultima non ha nessuna soluzione perché qualunque sia il complesso z, il numero $z\overline{z}$ è un reale quindi $z\overline{z} + 3 + 2i$ ha una parte immaginaria non nulla.
Ci rimane da trovare le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = -3 + i\sqrt{3}$$

ossia le radici quarte di $w = -3 + i\sqrt{3}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} |w|^2 &= 3^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12 = 3 \cdot 4 \\ |w| &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

e, se denotiamo θ l'argomento di w,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
Le radici quarte di w avranno quindi modulo uguale a $\sqrt[8]{12}$ e argomento $\frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.
L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[8]{12}\mathrm{e}^{\left(\frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right)i} \ \middle| \ 0 \leqslant k \leqslant 3 \right\}$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione data da

$$f(P) = 4P'(x) + P(-2)(x^2-1) \; .$$

a) Dimostrare che l'applicazione f è lineare.

Siano P e Q due polinomi. Sappiamo che $(P+Q)' = P' + Q'$ e, se λ è un reale allora $(\lambda P)' = \lambda P'$. È quindi facile dimostrare la linearità di f: siano P e Q due polinomi (di grado al massimo 3) e λ e μ due reali, allora

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + \mu Q) &= 4(\lambda P + \mu Q)'(x) + (\lambda P + \mu Q)(-2)(x^2-1) \\
&= 4\big((\lambda P)' + (\mu Q)'\big)(x) + \\
&\qquad\qquad (\lambda P(-2) + \mu Q(-2))(x^2-1) \\
&= 4\big(\lambda P' + \mu Q'\big)(x) + \\
&\qquad\qquad \lambda P(-2)(x^2-1) + \mu Q(-2)(x^2-1) \\
&= 4\lambda P'(x) + 4\mu Q'(x) + \\
&\qquad\qquad \lambda P(-2)(x^2-1) + \mu Q(-2)(x^2-1) \\
&= \lambda\big(4P'(x) + P(-2)(x^2-1)\big) + \\
&\qquad\qquad \mu\big(4Q'(x) + Q(-2)(x^2-1)\big) \\
&= \lambda f(P) + \mu f(Q)
\end{aligned}$$

quindi f è lineare.

b) Calcolare la matrice dell'applicazione f nella base data dai vettori $\{1, x, x^2, x^3\}$ come base di partenza e $\mathcal{B} = \{1, 2x^2 - x, x^2 - 1\}$ come base di arrivo.

Dobbiamo trovare le coordinate dei vettori $f(1)$, $f(x)$, $f(x^2)$ e $f(x^3)$ nella base $\mathcal{B}$. Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned}
f(1) &= 4 \cdot 0 + 1(x^2-1) = x^2 - 1 \\
f(x) &= 4 \cdot 1 - 2(x^2-1) = -2x^2 + 6 \\
f(x^2) &= 4 \cdot (2x) + 4(x^2-1) = 4x^2 + 8x - 4 \\
f(x^3) &= 4 \cdot (3x^2) - 8(x^2-1) = 4x^2 + 8
\end{aligned}$$

Per ciascuno dei quattro vettori $ax^2 + bx + c$ trovati sopra dovremo determinare i reali α, β e γ tali che $\alpha \cdot 1 + \beta(2x^2 - x) + \gamma(x^2-1) = ax^2 + bx + c$, cioè tali che $(2\beta + \gamma)x^2 - \beta x + \alpha - \gamma = ax^2 + bx + c$. Dovremo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\beta + \gamma = a \\ -\beta \qquad = b \\ \alpha - \gamma \; = c \end{cases}$$

Dalla seconda si determina immediatamente che $\beta = -b$ quindi nella prima si trova $\gamma = a - 2\beta = a + 2b$ e quindi nella terza $\alpha = \gamma + c = a + 2b + c$. La matrice di f risulta allora essere

$$M = \begin{pmatrix} 1+2\cdot 0-1 & -2+2\cdot 0+6 & 4+2\cdot 8-4 & 4+2\cdot 0+8 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 1+2\cdot 0 & -2+2\cdot 0 & 4+2\cdot 8 & 4+2\cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 1 & -2 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$8x^2 - 5y^2 - 5z^2 - 6yz - 16x + 8\sqrt{2}(y+z) - 8 = 0 \ .$$

Determinare la forma canonica di σ, riconoscere di che quadrica si tratta e scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x,y,z,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -5 & -3 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -3 & -5 & 4\sqrt{2} \\ -8 & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -8 \end{pmatrix} \ .$$

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \ .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -8$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} ,$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1|\underline{v}_2|\underline{v}_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z') \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-y' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione della quadrica nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 - 16x' + 16z' - 8 = 0,$$

ossia

$$4(x')^2 - (y')^2 - 4(z')^2 - 8x' + 8z' - 4 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' - 1 \\ Y = y' \\ Z = z' - 1 \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} - Z^2 = 1.$$

Essa è pertanto un iperboloide ellittico (o a due falde).
Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate. Si trova che

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + Z + 1) \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-Y + Z + 1) \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
3 settembre 2010 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano r e s le rette descritte da

$$r : \begin{cases} 3x + 3y + 4z - 7 = 0 \\ 2x + 3y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

a) Verificare che r e s sono complanari e determinare un'equazione del piano che le contiene.

Sappiamo che due rette intersecanti sono complanari, vista la domanda **??**, calcoliamo le coordinate del punto di intersezione P di r e s. Per ciò inseriamo i valori di x, y e z dati dall'equazione di s nelle equazioni di r, il sistema è

$$\begin{cases} 3t - 3 = 0 \\ 3t - 3 = 0 \end{cases}$$

ovvero $t = 1$. Nell'equazione di s si trova $P(7; 2; -5)$.

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di P soddisfano entrambe le equazioni di r.</u>

Quindi le rette r e s sono intersecanti e perciò complanari.

Per determinare l'equazione del piano che le contiene troviamo un vettore normale al piano. Possiamo determinare un vettore direttore della retta r facendo il prodotto vettoriale di vettori normali ai due piani che la definiscono (si potrebbe anche determinare un punto A di r e usare il vettore $\overrightarrow{AP}$). Un vettore direttore di r ha coordinate

$$\underline{u} = (3; 1; -3)$$

e quindi un'equazione del piano che contiene r e s è data da

$$\pi : x + z - 2 = 0$$

dove i coefficienti di x, y e z sono proporzionali ai coefficienti del vettore prodotto vettoriale di $\underline{u}$ e $\underline{v} = (3; 2; -3)$ che è il vettore direttore di s.

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di P e le coordinate del punto di s con $t = 0$ soddisfano l'equazione di π.</u>

Era possibile svolgere questa domanda in modo diverso: si poteva determinare il piano del fascio di piani di sostegno r che conteneva il punto $B(4; 0; -2)$ (che è il punto di s con $t = 0$) e verificare che la retta s era interamente conenuta in tale piano.

b) Verificare che la retta

$$\rho : \begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = -8 - 4t \\ z = 7 + 3t \end{cases}$$

è complanare con r e s.

Basta inserire i valori di x, y e z date dalle equazioni di ρ nell'equazione di π per verificare che tale equazione è verificata per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e quindi che ρ è inclusa nel piano π.

c) Determinare il punto di intersezione P di r e s.

Abbiamo già visto che

$$P(7; 2; -5).$$

d) Determinare il punto di intersezione Q di r e ρ.

Procedendo come nella prima domanda si trova $t = -2$ e

$$Q(1; 0; 1).$$

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di Q soddisfano l'equazione di π.</u>

e) Determinare il punto di intersezione S di ρ e s.

Sappiamo che le due rette s e ρ sono complanari quindi o hanno un punto di intersezione o sono parallele, siccome è abbastanza ovvio che non sono parallele hanno per forza un punto di intersezione. Qualunque siano gli errori di calcolo sappiamo che <u>dobbiamo</u> trovare un punto di intersezione.

Uguagliamo le espressioni di x, y e z e troviamo il sistema:

$$\begin{cases} 4 + 3t &= -5 - 3w \\ 2t &= -8 - 4w \\ -2 - 3t &= 7 + 3w \end{cases}$$

(abbiamo usato due parametri diversi perché nessuno garantisce che il valore del parametro che conviene in s sia lo stesso di quello che conviene in ρ). Non è particolarmente difficile vedere che questo sistema ammette un'unica soluzione $t = -2$, $w = -1$ che dà come intersezione

$$S(-2; -4; 4).$$

È caldamente suggerito di verificare in brutta copia che le coordinate di S soddisfano l'equazione di π.

Esercizio 2. Sia dato il sistema, dipendente di un parametro reale t,

$$\begin{cases} (t+1)x + 2y - 4z = -15 \\ 3x + y + 3z \qquad = 10 \\ 2x + y + (t+1)z \ = 3 \end{cases}$$

a) Determinare al variare del parametro t il numero di soluzioni del sistema.

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante è caldamente consigliato usare l'1 in centro alla matrice. Usiamo quindi la seconda riga per far comparire degli zeri nella prima e nella terza riga.

$$\det A = \begin{vmatrix} t-5 & 0 & -10 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-5)(t-2) - (-1)(-10) = t^2 - 7t$$

Quindi per t diverso da zero e da 7 il determinante di A è diverso da zero quindi la matrice A è di caratteristica (o rango) 3 e il sistema è determinato.

È immediato osservare che la sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante $1 \neq 0$ e quindi la matrice A ha caratteristica (o rango) almeno 2. Pe ciò la matrice A ha caratteristica (o rango) 2 quando $t = 0$ o 7.

Dal teorema di Kronecker, per determinare la caratteristica della matrice completa, basta calcolare il determinante della matrice costituita dalle due prime colonne di A e della colonna dei termini noti. Tale determinante con $t = 0$ risulta uguale a 0 quindi dal teorema di Rouché–Capelli il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni per $t = 0$. Invece il determinante con $t = 7$ risulta uguale a -49 e quindi, sempre dal teorema di Rouché–Capelli il sistema è impossibile.

b) Determinare l'insieme delle soluzioni quando il sistema <u>non è</u> determinato.

L'unico caso da considerare è il caso in cui $t = 0$. Possiamo limitarci alle due ultime equazioni (perché il determinante 2×2 in basso a sinistra è diverso da 2) e usare z come parametro. Senza nessuna difficoltà si trova che

$$\begin{cases} x = -2z + 7 \\ y = 3z - 11 \end{cases}$$

per cui l'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \{(-2z + 7, 3z - 11, z) | z \in \mathbb{R}\} \; .$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione

$$\left(z^4 - 3 - i\sqrt{3}\right)(z\overline{z} + 4 + 3i) = 0.$$

Il prodotto di due complessi è nullo se e solo se uno dei due è nullo. Quindi le soluzioni dell'equazione saranno le soluzioni dell'equazione

$$z^4 - 3 - i\sqrt{3} = 0$$

unite alle soluzioni dell'equazione

$$z\overline{z} + 4 + 3i = 0 \; .$$

Osserviamo che quest'ultima non ha nessuna soluzione perché qualunque sia il complesso z, il numero $z\overline{z}$ è un reale quindi $z\overline{z} + 4 + 3i$ ha una parte immaginaria non nulla.
Ci rimane da trovare le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = 3 + i\sqrt{3}$$

ossia le radici quarte di $w = 3 + i\sqrt{3}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} |w|^2 &= 3^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12 = 3 \cdot 4 \\ |w| &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

e, se denotiamo θ l'argomento di w,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $\theta = \frac{\pi}{6}$.
Le radici quarte di w avranno quindi modulo uguale a $\sqrt[8]{12}$ e argomento $\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.
L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[8]{12}\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right)i} \;\middle|\; 0 \leqslant k \leqslant 3 \right\}$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione data da

$$f(P) = 2P'(x) + P(-2)(x^2 - 1) \ .$$

a) Dimostrare che l'applicazione f è lineare.

Siano P e Q due polinomi. Sappiamo che $(P+Q)' = P' + Q'$ e, se λ è un reale allora $(\lambda P)' = \lambda P'$. È quindi facile dimostrare la linearità di f: siano P e Q due polinomi (di grado al massimo 3) e λ e μ due reali, allora

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + \mu Q) &= 2(\lambda P + \mu Q)'(x) + (\lambda P + \mu Q)(-2)(x^2 - 1) \\
&= 2\big((\lambda P)' + (\mu Q)'\big)(x) + \\
&\qquad\qquad (\lambda P(-2) + \mu Q(-2))(x^2 - 1) \\
&= 2\big(\lambda P' + \mu Q'\big)(x) + \\
&\qquad\qquad \lambda P(-2)(x^2 - 1) + \mu Q(-2)(x^2 - 1) \\
&= 2\lambda P'(x) + 2\mu Q'(x) + \\
&\qquad\qquad \lambda P(-2)(x^2 - 1) + \mu Q(-2)(x^2 - 1) \\
&= \lambda\big(2P'(x) + P(-2)(x^2 - 1)\big) + \\
&\qquad\qquad \mu\big(2Q'(x) + Q(-2)(x^2 - 1)\big) \\
&= \lambda f(P) + \mu f(Q)
\end{aligned}$$

quindi f è lineare.

b) Calcolare la matrice dell'applicazione f nella base data dai vettori $\{1, x, x^2, x^3\}$ come base di partenza e $\mathcal{B} = \{1, 2x^2 - x, x^2 - 1\}$ come base di arrivo.

Dobbiamo trovare le coordinate dei vettori $f(1)$, $f(x)$, $f(x^2)$ e $f(x^3)$ nella base $\mathcal{B}$. Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2 \cdot 0 + 1(x^2 - 1) = x^2 - 1 \\
f(x) &= 2 \cdot 1 - 2(x^2 - 1) = -2x^2 + 4 \\
f(x^2) &= 2 \cdot (2x) + 4(x^2 - 1) = 4x^2 + 4x - 4 \\
f(x^3) &= 2 \cdot (3x^2) - 8(x^2 - 1) = -2x^2 + 8
\end{aligned}$$

Per ciascuno dei quattro vettori $ax^2 + bx + c$ trovati sopra dovremo determinare i reali α, β e γ tali che $\alpha \cdot 1 + \beta(2x^2 - x) + \gamma(x^2 - 1) = ax^2 + bx + c$, cioè tali che $(2\beta + \gamma)x^2 - \beta x + \alpha - \gamma = ax^2 + bx + c$. Dovremo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\beta + \gamma = a \\ -\beta \qquad = b \\ \alpha - \gamma \ = c \end{cases}$$

Dalla seconda si determina immediatamente che $\beta = -b$ quindi nella prima si trova $\gamma = a - 2\beta = a + 2b$ e quindi nella terza $\alpha = \gamma + c = a + 2b + c$. La matrice di f risulta allora essere

$$
\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} 1+2\cdot 0-1 & -2+2\cdot 0+4 & 4+2\cdot 4-4 & -2+2\cdot 0+8 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1+2\cdot 0 & -2+2\cdot 0 & 4+2\cdot 4 & -2+2\cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 12 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Esercizio 5. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$8x^2 - 5y^2 - 5z^2 - 6yz + 32x + 8\sqrt{2}(y+z) + 16 = 0 \ .$$

Determinare la forma canonica di σ, riconoscere di che quadrica si tratta e scrivere esplicitamente il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -5 & -3 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -3 & -5 & 4\sqrt{2} \\ 16 & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 16 \end{pmatrix} \ .$$

Dobbiamo anzitutto determinare una base ortonormale di autovettori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \ .$$

È facile vedere che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -8$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} ,$$

con $x, y, z \neq 0$. Pertanto una base ortonormale di autovettori di B è data da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} , \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

Introdotta la matrice (ortogonale)

$$M = \left(\underline{v}_1|\underline{v}_2|\underline{v}_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

abbiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z') \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-y' + z') \end{cases}$$

che porta l'equazione della quadrica nella forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 32x' + 16z' + 16 = 0,$$

ossia

$$4(x')^2 - (y')^2 - 4(z')^2 + 16x' + 8z' + 8 = 0.$$

Basta a questo punto effettuare la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 2 \\ Y = y' \\ Z = z' - 1 \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica della quadrica:

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} - Z^2 = 1.$$

Essa è pertanto un iperboloide ellittico (o a due falde).
Il cambiamento di coordinate che porta la quadrica dall'equazione di partenza alla forma canonica si ottiene semplicemente componendo la rotazione e la traslazione già utilizzate.
Si trova che

$$\begin{cases} x = X - 2 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + Z + 1) \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-Y + Z + 1) \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Matematica II (5 e 7,5 crediti) —
3 settembre 2010 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano r e s le rette descritte da

$$r : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 3x + 5y + 4z - 7 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -4 + t \end{cases}$$

a) Verificare che r e s sono complanari e determinare un'equazione del piano che le contiene.

Sappiamo che due rette intersecanti sono complanari, vista la domanda **??**, calcoliamo le coordinate del punto di intersezione P di r e s. Per ciò inseriamo i valori di x, y e z dati dall'equazione di s nelle equazioni di r, il sistema è

$$\begin{cases} 4t - 4 = 0 \\ 15t - 15 = 0 \end{cases}$$

ovvero $t = 1$. Nell'equazione di s si trova $P(3; 2; -3)$.

In brutta copia si verifica che le coordinate di P soddisfano entrambe le equazioni di r.

Quindi le rette r e s sono intersecanti e perciò complanari.

Per determinare l'equazione del piano che le contiene troviamo un vettore normale al piano. Possiamo determinare un vettore direttore della retta r facendo il prodotto vettoriale di vettori normali ai due piani che la definiscono (si potrebbe anche determinare un punto A di r e usare il vettore $\overrightarrow{AP}$). Un vettore direttore di r ha coordinate

$$\underline{u} = (1; 1; -2)$$

e quindi un'equazione del piano che contiene r e s è data da

$$\pi : 3x - 5y - z - 2 = 0$$

dove i coefficienti di x, y e z sono proporzionali ai coefficienti del vettore prodotto vettoriale di $\underline{u}$ e $\underline{v} = (2; 1; 1)$ che è il vettore direttore di s.

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di P e le coordinate del punto di s con $t = 0$ soddisfano l'equazione di π.</u>

Era possibile svolgere questa domanda in modo diverso: si poteva determinare il piano del fascio di piani di sostegno r che conteneva il punto $B(1; 1; -4)$ (che è il punto di s con $t = 0$) e verificare che la retta s era interamente conenuta in tale piano.

b) Verificare che la retta

$$\rho : \begin{cases} x = -7 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -13 - 7t \end{cases}$$

è complanare con r e s.

Basta inserire i valori di x, y e z date dalle equazioni di ρ nell'equazione di π per verificare che tale equazione è verificata per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e quindi che ρ è inclusa nel piano π.

c) Determinare il punto di intersezione P di r e s.

Abbiamo già visto che

$$P(3; 2; -3).$$

d) Determinare il punto di intersezione Q di r e ρ.

Procedendo come nella prima domanda si trova $t = -2$ e

$$Q(1; 0; 1).$$

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di Q soddisfano l'equazione di π.</u>

e) Determinare il punto di intersezione S di ρ e s.

Sappiamo che le due rette s e ρ sono complanari quindi o hanno un punto di intersezione o sono parallele, siccome è abbastanza ovvio che non sono parallele hanno per forza un punto di intersezione. Qualunque siano gli errori di calcolo sappiamo che <u>dobbiamo</u> trovare un punto di intersezione.

Uguagliamo le espressioni di x, y e z e troviamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 + 2t = -7 - 4w \\ 1 + t = -2 - w \\ -4 + t = -13 - 7w \end{cases}$$

(abbiamo usato due parametri diversi perché nessuno garantisce che il valore del parametro che conviene in s sia lo stesso di quello che conviene in ρ). Non è particolarmente difficile vedere che questo sistema ammette un'unica soluzione $t = -2$, $w = -1$ che dà come intersezione

$$S(-3; -1; -6).$$

<u>È caldamente suggerito di verificare in brutta copia che le coordinate di S soddisfano l'equazione di π.</u>

Esercizio 2. Sia dato il sistema, dipendente di un parametro reale t,

$$\begin{cases} (t+1)x - y + 5z = 18 \\ 2x + y + z \qquad\quad = 3 \\ x - 2y + (t+8)z = 29 \end{cases}$$

a) Determinare al variare del parametro t il numero di soluzioni del sistema.

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & t+8 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante è caldamente consigliato usare l'1 in centro alla matrice. Usiamo quindi la seconda riga per far comparire degli zeri nella prima e nella terza riga.

$$\det A = \begin{vmatrix} t+3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & t+10 \end{vmatrix} = (t+3)(t+10) - (5)(6) = t^2 + 13t$$

Quindi per t diverso da zero e da -13 il determinante di A è diverso da zero quindi la matrice A è di caratteristica (o rango) 3 e il sistema è determinato.

È immediato osservare che la sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante $-5 \neq 0$ e quindi la matrice A ha caratteristica (o rango) almeno 2. Pe ciò la matrice A ha caratteristica (o rango) 2 quando $t = 0$ o -13.

Dal teorema di Kronecker, per determinare la caratteristica della matrice completa, basta calcolare il determinante della matrice costituita dalle due prime colonne di A e della colonna dei termini noti. Tale determinante con $t = 0$ risulta uguale a 0 quindi dal teorema di Rouché–Capelli il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni per $t = 0$. Invece il determinante con $t = -13$ risulta uguale a -455 e quindi, sempre dal teorema di Rouché–Capelli il sistema è impossibile.

b) Determinare l'insieme delle soluzioni quando il sistema <u>non è</u> determinato.

L'unico caso da considerare è il caso in cui $t = 0$. Possiamo limitarci alle due ultime equazioni (perché il determinante 2×2 in basso a sinistra è diverso da 2) e usare z come parametro. Senza nessuna difficoltà si trova che

$$\begin{cases} x = -2z + 7 \\ y = 3z - 11 \end{cases}$$

per cui l'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \{(-2z + 7, 3z - 11, z) | z \in \mathbb{R}\} \ .$$

Esercizio 3. Si consideri la regione di piano Ω delimitata dagli assi coordinati, dalla parabola $y = x^2 + 1$ e dalla retta $2x + y - 4 = 0$.

a) Dopo aver disegnato Ω, mostrare che esso è un insieme y-semplice.

Dopo aver disegnato Ω, risulta chiaro che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

dove $g_1(x) = 0$ e

$$g_2(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Quindi Ω è un insieme y-semplice.

b) Calcolare

$$\iint_\Omega x \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ .$$

In base a quanto visto nel punto precedente, abbiamo che

$$\begin{aligned} \iint_\Omega x \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 x \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x \left(\int_0^{x^2+1} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 x \left(\int_0^{-2x+4} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x(x^2 + 1) \ \mathrm{d}x + \int_1^2 x(-2x + 4) \ \mathrm{d}x = \frac{25}{12} \ . \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f(x, y) = 2x^2y + \frac{2}{3}y^3 + 4(x^2 + y^2) - 4xy$.

a) Calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}}f(-1, 0)$, dove $\underline{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Poiché le derivate parziali di f,

$$f_x = 4xy + 8x - 4y, \qquad f_y = 2x^2 + 2y^2 + 8y - 4x,$$

sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$, essa è differenziabile ovunque e quindi possiamo utilizzare la formula del gradiente. Pertanto

$$D_{\underline{v}}f(-1,0) = f_x(-1,0)\frac{\sqrt{2}}{2} + f_y(-1,0)\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

b) Mostrare che i punti $O(0,0)$, $A(2,-4)$, $B(3,-3)$ e $C(-1,-1)$ sono punti critici di f.

Basta mostrare che le coordinate dei punti assegnati risolvono il sistema

$$\begin{cases} 4xy + 8x - 4y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 8y - 4x = 0 \end{cases}$$

c) Dimostrare che f non ha altri punti critici.

In questo caso bisogna risolvere il sistema del punto precedente e verificare che non ha altre soluzioni. La prima equazione può essere riscritta

$$(4y + 8)x - 4y = 0.$$

Si può osservare che $y = -2$ non dà luogo a soluzioni e quindi si ottiene $x = \frac{y}{y+2}$. Sostituendo nella seconda si ottiene una frazione il cui numeratore è fattorizzabile come $y(y + 4)(y + 3)(y + 1)$. (Nota1: la fattorizzazione è già data nel punto precedente perché le quattro soluzioni dell'equazione sono indicate). Si arriva pertanto ai quattro punti O, A, B e C. (Nota2: si poteva altresì osservare che il sistema è il sistema dell'intersezione tra una circonferenza e un'iperbole (equilatera) e quindi non ci potevano essere più di quattro soluzioni).

d) Determinare gli estremi relativi di f.

Dobbiamo ora studiare la natura dei punti critici. Le derivate seconde di f sono

$$f_{xx} = 4y + 8, \quad f_{xy} = 4x - 4, \quad f_{yy} = 4y + 8.$$

La matrice hessiana di f in O,

$$Hf(0,0) = 2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

è definita positiva e quindi O è un punto di minimo relativo. Quella in A,

$$Hf(2,-4) = 2\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

è definita negativa e quindi A è un punto di massimo relativo. Quelle in B e in C,

$$Hf(3,-3) = 2\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad Hf(-1,-1) = 2\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

sono entrambe indefinite e quindi B e C sono punti di sella.

e) (Facoltativo) Si determinino gli estremi assoluti di f.

Abbiamo che $f(0,y) = \frac{2}{3}y^3 + 4y^2$. Basta quindi osservare che

$$\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = +\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} f(0,y) = -\infty$$

per concludere che f non può avere estremi assoluti.

Esercizio 5. Si consideri la curva

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \\ y(t) = t - \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \end{cases} \qquad t \in [-1,1]$$

e si indichi con γ il suo sostegno.

a) La curva è regolare?

Posto $\underline{r}(t) = (x(t), y(t)) = (-\frac{1}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}, t - \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}})$, abbiamo che

$$\underline{r}'(t) = \left(1\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}, \frac{(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})^2}{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}\right).$$

Si vede subito che $\mathbf{r}'(0) = (0,0)$ e quindi la curva non è regolare.

b) Dopo aver verificato che γ passa per il punto $P(-\frac{2}{5}, \ln 2 - \frac{3}{5})$, si scriva l'equazione della retta tangente a γ in tale punto.

Abbiamo che $\underline{r}(\ln 2) = (-\frac{2}{5}, \ln 2 - \frac{3}{5})$ sono proprio le coordinate di P. Poiché $\ln 2 \in [-1,1]$, il punto P appartiene al sostegno γ. Si ha poi che

$$\underline{r}'(\ln 2) = (x'(\ln 2), y'(\ln 2)) = \left(\frac{6}{25}, \frac{9}{25}\right),$$

cosicché la retta tangente cercata ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{5} - -\frac{6}{25}\tau \\ y = \ln 2 - \frac{3}{5} + \frac{9}{25}\tau \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Matematica II (5 e 7,5 crediti) —
3 settembre 2010 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano r e s le rette descritte da

$$r : \begin{cases} 3x + 3y + z - 4 = 0 \\ 2x + 7y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2t \\ z = -6 + t \end{cases}$$

a) Verificare che r e s sono complanari e determinare un'equazione del piano che le contiene.

Sappiamo che due rette intersecanti sono complanari, vista la domanda **??**, calcoliamo le coordinate del punto di intersezione P di r e s. Per ciò inseriamo i valori di x, y e z dati dall'equazione di s nelle equazioni di r, il sistema è

$$\begin{cases} t - 1 = 0 \\ -11t + 11 = 0 \end{cases}$$

ovvero $t = 1$. Nell'equazione di s si trova $P(5; -2; -5)$.

In brutta copia si verifica che le coordinate di P soddisfano entrambe le equazioni di r.

Quindi le rette r e s sono intersecanti e perciò complanari.

Per determinare l'equazione del piano che le contiene troviamo un vettore normale al piano. Possiamo determinare un vettore direttore della retta r facendo il prodotto vettoriale di vettori normali ai due piani che la definiscono (si potrebbe anche determinare un punto A di r e usare il vettore $\overrightarrow{AP}$). Un vettore direttore di r ha coordinate

$$\underline{u} = (2; -1; -3)$$

e quindi un'equazione del piano che contiene r e s è data da

$$\pi : 7x + 8y + 2z - 9 = 0$$

dove i coefficienti di x, y e z sono proporzionali ai coefficienti del vettore prodotto vettoriale di $\underline{u}$ e $\underline{v} = (2; -2; 1)$ che è il vettore direttore di s.

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di P e le coordinate del punto di s con $t = 0$ soddisfano l'equazione di π.</u>

Era possibile svolgere questa domanda in modo diverso: si poteva determinare il piano del fascio di piani di sostegno r che conteneva il punto $B(3; 0; -6)$ (che è il punto di s con $t = 0$) e verificare che la retta s era interamente conenuta in tale piano.

b) Verificare che la retta

$$\rho : \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 8 + 4t \\ z = -17 - 9t \end{cases}$$

è complanare con r e s.

Basta inserire i valori di x, y e z date dalle equazioni di ρ nell'equazione di π per verificare che tale equazione è verificata per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e quindi che ρ è inclusa nel piano π.

c) Determinare il punto di intersezione P di r e s.

Abbiamo già visto che

$$P(5; -2; -5).$$

d) Determinare il punto di intersezione Q di r e ρ.

Procedendo come nella prima domanda si trova $t = -2$ e

$$Q(1; 0; 1).$$

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di Q soddisfano l'equazione di π.</u>

e) Determinare il punto di intersezione S di ρ e s.

Sappiamo che le due rette s e ρ sono complanari quindi o hanno un punto di intersezione o sono parallele, siccome è abbastanza ovvio che non sono parallele hanno per forza un punto di intersezione. Qualunque siano gli errori di calcolo sappiamo che <u>dobbiamo</u> trovare un punto di intersezione.

Uguagliamo le espressioni di x, y e z e troviamo il sistema:

$$\begin{cases} 3 + 2t = -3 - 2w \\ -2t = 8 + 4w \\ -6 + t = -17 - 9w \end{cases}$$

(abbiamo usato due parametri diversi perché nessuno garantisce che il valore del parametro che conviene in s sia lo stesso di quello che conviene in ρ). Non è particolarmente difficile vedere che questo sistema ammette un'unica soluzione $t = -2$, $w = -1$ che dà come intersezione

$$S(-1; 4; -8).$$

<u>È caldamente suggerito di verificare in brutta copia che le coordinate di S soddisfano l'equazione di π.</u>

Esercizio 2. Sia dato il sistema, dipendente di un parametro reale t,

$$\begin{cases} (t+1)x + y - z &= -4 \\ 3x + y + 3z &= 10 \\ 2x + y + (t+1)z &= 3 \end{cases}$$

a) Determinare al variare del parametro t il numero di soluzioni del sistema.

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante è caldamente consigliato usare l'1 in centro alla matrice. Usiamo quindi la seconda riga per far comparire degli zeri nella prima e nella terza riga.

$$\det A = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t-2) - (-1)(-4) = t^2 - 4t$$

Quindi per t diverso da zero e da 4 il determinante di A è diverso da zero quindi la matrice A è di caratteristica (o rango) 3 e il sistema è determinato.

È immediato osservare che la sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante $1 \neq 0$ e quindi la matrice A ha caratteristica (o rango) almeno 2. Pe ciò la matrice A ha caratteristica (o rango) 2 quando $t = 0$ o 4.

Dal teorema di Kronecker, per determinare la caratteristica della matrice completa, basta calcolare il determinante della matrice costituita dalle due prime colonne di A e della colonna dei termini noti. Tale determinante con $t = 0$ risulta uguale a 0 quindi dal teorema di Rouché–Capelli il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni per $t = 0$. Invece il determinante con $t = 4$ risulta uguale a -28 e quindi, sempre dal teorema di Rouché–Capelli il sistema è impossibile.

b) Determinare l'insieme delle soluzioni quando il sistema <u>non è</u> determinato.

L'unico caso da considerare è il caso in cui $t = 0$. Possiamo limitarci alle due ultime equazioni (perché il determinante 2×2 in basso a sinistra è diverso da 2) e usare z come parametro. Senza nessuna difficoltà si trova che

$$\begin{cases} x = -2z + 7 \\ y = 3z - 11 \end{cases}$$

per cui l'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \{(-2z + 7, 3z - 11, z) | z \in \mathbb{R}\} \ .$$

Esercizio 3. Si consideri la regione di piano Ω delimitata dagli assi coordinati, dalla parabola $y = x^2 + 1$ e dalla retta $2x + y - 4 = 0$.

a) Dopo aver disegnato Ω, mostrare che esso è un insieme y-semplice.

Dopo aver disegnato Ω, risulta chiaro che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

dove $g_1(x) = 0$ e

$$g_2(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Quindi Ω è un insieme y-semplice.

b) Calcolare

$$\iint_\Omega x \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ .$$

In base a quanto visto nel punto precedente, abbiamo che

$$\begin{aligned} \iint_\Omega x \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 x \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x \left(\int_0^{x^2+1} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 x \left(\int_0^{-2x+4} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x(x^2 + 1) \ \mathrm{d}x + \int_1^2 x(-2x + 4) \ \mathrm{d}x = \frac{25}{12} \ . \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f(x, y) = 2x^2y + \frac{2}{3}y^3 + 5(x^2 + y^2) - 6xy$.

a) Calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}}f(-1, 0)$, dove $\underline{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Poiché le derivate parziali di f,

$$f_x = 4xy + 10x - 6y, \qquad f_y = 2x^2 + 2y^2 + 10y - 6x,$$

sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$, essa è differenziabile ovunque e quindi possiamo utilizzare la formula del gradiente. Pertanto

$$D_{\underline{v}}f(-1,0) = f_x(-1,0)\frac{\sqrt{2}}{2} + f_y(-1,0)\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

b) Mostrare che i punti $O(0,0)$, $A(3,-5)$, $B(4,-4)$ e $C(-1,-1)$ sono punti critici di f.

Basta mostrare che le coordinate dei punti assegnati risolvono il sistema

$$\begin{cases} 4xy + 10x - 6y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 10y - 6x = 0 \end{cases}$$

c) Dimostrare che f non ha altri punti critici.

In questo caso bisogna risolvere il sistema del punto precedente e verificare che non ha altre soluzioni. La prima equazione può essere riscritta

$$(4y + 10)x - 6y = 0.$$

Si può osservare che $y = -\frac{5}{2}$ non dà luogo a soluzioni e quindi si ottiene $x = \frac{3y}{2y+5}$. Sostituendo nella seconda si ottiene una frazione il cui numeratore è fattorizzabile come $y(y + 5)(y + 4)(y + 1)$. (Nota1: la fattorizzazione è già data nel punto precedente perché le quattro soluzioni dell'equazione sono indicate). Si arriva pertanto ai quattro punti O, A, B e C. (Nota2: si poteva altresì osservare che il sistema è il sistema dell'intersezione tra una circonferenza e un'iperbole (equilatera) e quindi non ci potevano essere più di quattro soluzioni).

d) Determinare gli estremi relativi di f.

Dobbiamo ora studiare la natura dei punti critici. Le derivate seconde di f sono

$$f_{xx} = 4y + 10, \quad f_{xy} = 4x - 6, \quad f_{yy} = 4y + 10.$$

La matrice hessiana di f in O,

$$Hf(0,0) = 2\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

è definita positiva e quindi O è un punto di minimo relativo. Quella in A,

$$Hf(3,-5) = 2\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},$$

è definita negativa e quindi A è un punto di massimo relativo. Quelle in B e in C,

$$Hf(4,-4) = 2\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad Hf(-1,-1) = 2\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix},$$

sono entrambe indefinite e quindi B e C sono punti di sella.

e) (Facoltativo) Si determinino gli estremi assoluti di f.

Abbiamo che $f(0,y) = \frac{2}{3}y^3 + 5y^2$. Basta quindi osservare che

$$\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = +\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} f(0,y) = -\infty$$

per concludere che f non può avere estremi assoluti.

Esercizio 5. Si consideri la curva

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \\ y(t) = t - \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \end{cases} \qquad t \in [-1,1]$$

e si indichi con γ il suo sostegno.

a) La curva è regolare?

Posto $\underline{r}(t) = (x(t), y(t)) = (-\frac{2}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}, t - \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}})$, abbiamo che

$$\underline{r}'(t) = \left(2\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}, \frac{(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})^2}{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}\right).$$

Si vede subito che $\mathbf{r}'(0) = (0,0)$ e quindi la curva non è regolare.

b) Dopo aver verificato che γ passa per il punto $P(-\frac{4}{5}, \ln 2 - \frac{3}{5})$, si scriva l'equazione della retta tangente a γ in tale punto.

Abbiamo che $\underline{r}(\ln 2) = (-\frac{4}{5}, \ln 2 - \frac{3}{5})$ sono proprio le coordinate di P. Poiché $\ln 2 \in [-1,1]$, il punto P appartiene al sostegno γ. Si ha poi che

$$\underline{r}'(\ln 2) = (x'(\ln 2), y'(\ln 2)) = \left(\frac{12}{25}, \frac{9}{25}\right),$$

cosicché la retta tangente cercata ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{5} - -\frac{12}{25}\tau \\ y = \ln 2 - \frac{3}{5} + \frac{9}{25}\tau \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Matematica II (5 e 7,5 crediti) —
3 settembre 2010 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano r e s le rette descritte da

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z - 3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

a) Verificare che r e s sono complanari e determinare un'equazione del piano che le contiene.

Sappiamo che due rette intersecanti sono complanari, vista la domanda **??**, calcoliamo le coordinate del punto di intersezione P di r e s. Per ciò inseriamo i valori di x, y e z dati dall'equazione di s nelle equazioni di r, il sistema è

$$\begin{cases} 3t - 3 = 0 \\ 6t - 6 = 0 \end{cases}$$

ovvero $t = 1$. Nell'equazione di s si trova $P(5; -2; 3)$.

In brutta copia si verifica che le coordinate di P soddisfano entrambe le equazioni di r.

Quindi le rette r e s sono intersecanti e perciò complanari.

Per determinare l'equazione del piano che le contiene troviamo un vettore normale al piano. Possiamo determinare un vettore direttore della retta r facendo il prodotto vettoriale di vettori normali ai due piani che la definiscono (si potrebbe anche determinare un punto A di r e usare il vettore $\overrightarrow{AP}$). Un vettore direttore di r ha coordinate

$$\underline{u} = (2; -1; 1)$$

e quindi un'equazione del piano che contiene r e s è data da

$$\pi : y + z - 1 = 0$$

dove i coefficienti di x, y e z sono proporzionali ai coefficienti del vettore prodotto vettoriale di $\underline{u}$ e $\underline{v} = (1; 1; -1)$ che è il vettore direttore di s.

In brutta copia si verifica che le coordinate di P e le coordinate del punto di s con $t = 0$ soddisfano l'equazione di π.

Era possibile svolgere questa domanda in modo diverso: si poteva determinare il piano del fascio di piani di sostegno r che conteneva il punto $B(4; -3; 4)$ (che è il punto di s con $t = 0$) e verificare che la retta s era interamente conenuta in tale piano.

b) Verificare che la retta

$$\rho : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -10 - 5t \\ z = 11 + 5t \end{cases}$$

è complanare con r e s.

Basta inserire i valori di x, y e z date dalle equazioni di ρ nell'equazione di π per verificare che tale equazione è verificata per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e quindi che ρ è inclusa nel piano π.

c) Determinare il punto di intersezione P di r e s.

Abbiamo già visto che

$$P(5; -2; 3).$$

d) Determinare il punto di intersezione Q di r e ρ.

Procedendo come nella prima domanda si trova $t = -2$ e

$$Q(1; 0; 1).$$

In brutta copia si verifica che le coordinate di Q soddisfano l'equazione di π.

e) Determinare il punto di intersezione S di ρ e s.

Sappiamo che le due rette s e ρ sono complanari quindi o hanno un punto di intersezione o sono parallele, siccome è abbastanza ovvio che non sono parallele hanno per forza un punto di intersezione. Qualunque siano gli errori di calcolo sappiamo che <u>dobbiamo</u> trovare un punto di intersezione.

Uguagliamo le espressioni di x, y e z e troviamo il sistema:

$$\begin{cases} 4 + t &= 3 + w \\ -3 + t &= -10 - 5w \\ 4 - t &= 11 + 5w \end{cases}$$

(abbiamo usato due parametri diversi perché nessuno garantisce che il valore del parametro che conviene in s sia lo stesso di quello che conviene in ρ). Non è particolarmente difficile vedere che questo sistema ammette un'unica soluzione $t = -2$, $w = -1$ che dà come intersezione

$$S(2; -5; 6).$$

È caldamente suggerito di verificare in brutta copia che le coordinate di S soddisfano l'equazione di π.

Esercizio 2. Sia dato il sistema, dipendente di un parametro reale t,

$$\begin{cases} (t+1)x - 2y + 8z &= 29 \\ 3x + y + 3z &= 10 \\ 2x - 3y + (t+13)z &= 47 \end{cases}$$

a) Determinare al variare del parametro t il numero di soluzioni del sistema.

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & t+13 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante è caldamente consigliato usare l'1 in centro alla matrice. Usiamo quindi la seconda riga per far comparire degli zeri nella prima e nella terza riga.

$$\det A = \begin{vmatrix} t+7 & 0 & 14 \\ 3 & 1 & 3 \\ 11 & 0 & t+22 \end{vmatrix} = (t+7)(t+22) - (11)(14) = t^2 + 29t$$

Quindi per t diverso da zero e da -29 il determinante di A è diverso da zero quindi la matrice A è di caratteristica (o rango) 3 e il sistema è determinato.

È immediato osservare che la sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante $-11 \neq 0$ e quindi la matrice A ha caratteristica (o rango) almeno 2. Pe ciò la matrice A ha caratteristica (o rango) 2 quando $t = 0$ o -29.

Dal teorema di Kronecker, per determinare la caratteristica della matrice completa, basta calcolare il determinante della matrice costituita dalle due prime colonne di A e della colonna dei termini noti. Tale determinante con $t = 0$ risulta uguale a 0 quindi dal teorema di Rouché–Capelli il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni per $t = 0$. Invece il determinante con $t = -29$ risulta uguale a -2233 e quindi, sempre dal teorema di Rouché–Capelli il sistema è impossibile.

b) Determinare l'insieme delle soluzioni quando il sistema <u>non è</u> determinato.

L'unico caso da considerare è il caso in cui $t = 0$. Possiamo limitarci alle due ultime equazioni (perché il determinante 2×2 in basso a sinistra è diverso da 2) e usare z come parametro. Senza nessuna difficoltà si trova che

$$\begin{cases} x = -2z + 7 \\ y = 3z - 11 \end{cases}$$

per cui l'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \{(-2z + 7, 3z - 11, z) | z \in \mathbb{R}\} \ .$$

Esercizio 3. Si consideri la regione di piano Ω delimitata dagli assi coordinati, dalla parabola $y = x^2 + 1$ e dalla retta $2x + y - 4 = 0$.

a) Dopo aver disegnato Ω, mostrare che esso è un insieme x-semplice.

Dopo aver disegnato Ω, risulta chiaro che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

dove

$$h_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y-1} & \text{se } 1 < y \le 2 \end{cases}$$

e $h_2(y) = -\frac{1}{2}y + 2$. Quindi Ω è un insieme x-semplice.

b) Calcolare

$$\iint_\Omega x \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ .$$

In base a quanto visto nel punto precedente, abbiamo che

$$\begin{aligned} \iint_\Omega x \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} x \ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{-\frac{1}{2}y+2} x \ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{y-1}}^{-\frac{1}{2}y+2} x \ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}y + 2 \right)^2 \mathrm{d}y + \int_1^2 \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}y + 2 \right)^2 - \frac{1}{2}(y-1) \right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{25}{12} \ . \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f(x, y) = 2x^2y + \frac{2}{3}y^3 + 3(x^2 + y^2) - 2xy$.

a) Calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}}f(-1,0)$, dove $\underline{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Poiché le derivate parziali di f,

$$f_x = 4xy + 6x - 2y, \qquad f_y = 2x^2 + 2y^2 + 6y - 2x,$$

sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$, essa è differenziabile ovunque e quindi possiamo utilizzare la formula del gradiente. Pertanto

$$D_{\underline{v}}f(-1,0) = f_x(-1,0)\frac{\sqrt{2}}{2} + f_y(-1,0)\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

b) Mostrare che i punti $O(0,0)$, $A(1,-3)$, $B(2,-2)$ e $C(-1,-1)$ sono punti critici di f.

Basta mostrare che le coordinate dei punti assegnati risolvono il sistema

$$\begin{cases} 4xy + 6x - 2y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 6y - 2x = 0 \end{cases}$$

c) Dimostrare che f non ha altri punti critici.

In questo caso bisogna risolvere il sistema del punto precedente e verificare che non ha altre soluzioni. La prima equazione può essere riscritta

$$(4y + 6)x - 2y = 0.$$

Si può osservare che $y = -\frac{3}{2}$ non dà luogo a soluzioni e quindi si ottiene $x = \frac{y}{2y+3}$. Sostituendo nella seconda si ottiene una frazione il cui numeratore è fattorizzabile come $y(y+3)(y+2)(y+1)$. (Nota1: la fattorizzazione è già data nel punto precedente perché le quattro soluzioni dell'equazione sono indicate). Si arriva pertanto ai quattro punti O, A, B e C. (Nota2: si poteva altresì osservare che il sistema è il sistema dell'intersezione tra una circonferenza e un'iperbole (equilatera) e quindi non ci potevano essere più di quattro soluzioni).

d) Determinare gli estremi relativi di f.

Dobbiamo ora studiare la natura dei punti critici. Le derivate seconde di f sono

$$f_{xx} = 4y + 6, \quad f_{xy} = 4x - 2, \quad f_{yy} = 4y + 6.$$

La matrice hessiana di f in O,

$$Hf(0,0) = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

è definita positiva e quindi O è un punto di minimo relativo. Quella in A,

$$Hf(1,-3) = 2\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

è definita negativa e quindi A è un punto di massimo relativo. Quelle in B e in C,

$$Hf(2,-2) = 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Hf(-1,-1) = 2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

sono entrambe indefinite e quindi B e C sono punti di sella.

e) (Facoltativo) Si determinino gli estremi assoluti di f.

Abbiamo che $f(0,y) = \frac{2}{3}y^3 + 3y^2$. Basta quindi osservare che

$$\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = +\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} f(0,y) = -\infty$$

per concludere che f non può avere estremi assoluti.

Esercizio 5. Si consideri la curva

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \\ y(t) = t - \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \end{cases} \qquad t \in [-1,1]$$

e si indichi con γ il suo sostegno.

a) La curva è regolare?

Posto $\underline{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{1}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}, t - \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}})$, abbiamo che

$$\underline{r}'(t) = \left(-1\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}, \frac{(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})^2}{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}\right).$$

Si vede subito che $\mathbf{r}'(0) = (0,0)$ e quindi la curva non è regolare.

b) Dopo aver verificato che γ passa per il punto $P(\frac{2}{5}, \ln 2 - \frac{3}{5})$, si scriva l'equazione della retta tangente a γ in tale punto.

Abbiamo che $\underline{r}(\ln 2) = (\frac{2}{5}, \ln 2 - \frac{3}{5})$ sono proprio le coordinate di P. Poiché $\ln 2 \in [-1,1]$, il punto P appartiene al sostegno γ. Si ha poi che

$$\underline{r}'(\ln 2) = (x'(\ln 2), y'(\ln 2)) = \left(-\frac{6}{25}, \frac{9}{25}\right),$$

cosicché la retta tangente cercata ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} - \frac{6}{25}\tau \\ y = \ln 2 - \frac{3}{5} + \frac{9}{25}\tau \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Matematica II (5 e 7,5 crediti) —
3 settembre 2010 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano r e s le rette descritte da

$$r : \begin{cases} 3x + 3y + 4z - 7 = 0 \\ 2x + 3y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

a) Verificare che r e s sono complanari e determinare un'equazione del piano che le contiene.

Sappiamo che due rette intersecanti sono complanari, vista la domanda **??**, calcoliamo le coordinate del punto di intersezione P di r e s. Per ciò inseriamo i valori di x, y e z dati dall'equazione di s nelle equazioni di r, il sistema è

$$\begin{cases} 3t - 3 = 0 \\ 3t - 3 = 0 \end{cases}$$

ovvero $t = 1$. Nell'equazione di s si trova $P(7; 2; -5)$.

In brutta copia si verifica che le coordinate di P soddisfano entrambe le equazioni di r.

Quindi le rette r e s sono intersecanti e perciò complanari.

Per determinare l'equazione del piano che le contiene troviamo un vettore normale al piano. Possiamo determinare un vettore direttore della retta r facendo il prodotto vettoriale di vettori normali ai due piani che la definiscono (si potrebbe anche determinare un punto A di r e usare il vettore $\overrightarrow{AP}$). Un vettore direttore di r ha coordinate

$$\underline{u} = (3; 1; -3)$$

e quindi un'equazione del piano che contiene r e s è data da

$$\pi : x + z - 2 = 0$$

dove i coefficienti di x, y e z sono proporzionali ai coefficienti del vettore prodotto vettoriale di $\underline{u}$ e $\underline{v} = (3; 2; -3)$ che è il vettore direttore di s.

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di P e le coordinate del punto di s con $t = 0$ soddisfano l'equazione di π.</u>

Era possibile svolgere questa domanda in modo diverso: si poteva determinare il piano del fascio di piani di sostegno r che conteneva il punto $B(4; 0; -2)$ (che è il punto di s con $t = 0$) e verificare che la retta s era interamente conenuta in tale piano.

b) Verificare che la retta

$$\rho : \begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = -8 - 4t \\ z = 7 + 3t \end{cases}$$

è complanare con r e s.

Basta inserire i valori di x, y e z date dalle equazioni di ρ nell'equazione di π per verificare che tale equazione è verificata per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e quindi che ρ è inclusa nel piano π.

c) Determinare il punto di intersezione P di r e s.

Abbiamo già visto che

$$P(7; 2; -5).$$

d) Determinare il punto di intersezione Q di r e ρ.

Procedendo come nella prima domanda si trova $t = -2$ e

$$Q(1; 0; 1).$$

<u>In brutta copia si verifica che le coordinate di Q soddisfano l'equazione di π.</u>

e) Determinare il punto di intersezione S di ρ e s.

Sappiamo che le due rette s e ρ sono complanari quindi o hanno un punto di intersezione o sono parallele, siccome è abbastanza ovvio che non sono parallele hanno per forza un punto di intersezione. Qualunque siano gli errori di calcolo sappiamo che <u>dobbiamo</u> trovare un punto di intersezione.

Uguagliamo le espressioni di x, y e z e troviamo il sistema:

$$\begin{cases} 4 + 3t & = -5 - 3w \\ 2t & = -8 - 4w \\ -2 - 3t & = 7 + 3w \end{cases}$$

(abbiamo usato due parametri diversi perché nessuno garantisce che il valore del parametro che conviene in s sia lo stesso di quello che conviene in ρ). Non è particolarmente difficile vedere che questo sistema ammette un'unica soluzione $t = -2$, $w = -1$ che dà come intersezione

$$S(-2; -4; 4).$$

<u>È caldamente suggerito di verificare in brutta copia che le coordinate di S soddisfano l'equazione di π.</u>

Esercizio 2. Sia dato il sistema, dipendente di un parametro reale t,

$$\begin{cases} (t+1)x + 2y - 4z = -15 \\ 3x + y + 3z = 10 \\ 2x + y + (t+1)z = 3 \end{cases}$$

a) Determinare al variare del parametro t il numero di soluzioni del sistema.

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante è caldamente consigliato usare l'1 in centro alla matrice. Usiamo quindi la seconda riga per far comparire degli zeri nella prima e nella terza riga.

$$\det A = \begin{vmatrix} t-5 & 0 & -10 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-5)(t-2) - (-1)(-10) = t^2 - 7t$$

Quindi per t diverso da zero e da 7 il determinante di A è diverso da zero quindi la matrice A è di caratteristica (o rango) 3 e il sistema è determinato.

È immediato osservare che la sottomatrice 2×2 in basso a sinistra ha determinante $1 \neq 0$ e quindi la matrice A ha caratteristica (o rango) almeno 2. Pe ciò la matrice A ha caratteristica (o rango) 2 quando $t = 0$ o 7.

Dal teorema di Kronecker, per determinare la caratteristica della matrice completa, basta calcolare il determinante della matrice costituita dalle due prime colonne di A e della colonna dei termini noti. Tale determinante con $t = 0$ risulta uguale a 0 quindi dal teorema di Rouché–Capelli il sistema risulta indeterminato con una retta di soluzioni per $t = 0$. Invece il determinante con $t = 7$ risulta uguale a -49 e quindi, sempre dal teorema di Rouché–Capelli il sistema è impossibile.

b) Determinare l'insieme delle soluzioni quando il sistema <u>non è</u> determinato.

L'unico caso da considerare è il caso in cui $t = 0$. Possiamo limitarci alle due ultime equazioni (perché il determinante 2×2 in basso a sinistra è diverso da 2) e usare z come parametro. Senza nessuna difficoltà si trova che

$$\begin{cases} x = -2z + 7 \\ y = 3z - 11 \end{cases}$$

per cui l'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \{(-2z + 7, 3z - 11, z) | z \in \mathbb{R}\} \; .$$

Esercizio 3. Si consideri la regione di piano Ω delimitata dagli assi coordinati, dalla parabola $y = x^2 + 1$ e dalla retta $2x + y - 4 = 0$.

a) Dopo aver disegnato Ω, mostrare che esso è un insieme x-semplice.

Dopo aver disegnato Ω, risulta chiaro che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, \; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

dove

$$h_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y-1} & \text{se } 1 < y \leq 2 \end{cases}$$

e $h_2(y) = -\frac{1}{2}y + 2$. Quindi Ω è un insieme x-semplice.

b) Calcolare

$$\iint_\Omega x \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y \; .$$

In base a quanto visto nel punto precedente, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega x \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} x \; \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{-\frac{1}{2}y+2} x \; \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{y-1}}^{-\frac{1}{2}y+2} x \; \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}y + 2 \right)^2 \mathrm{d}y + \int_1^2 \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}y + 2 \right)^2 - \frac{1}{2}(y-1) \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{25}{12} \; .
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f(x, y) = 2x^2y + \frac{2}{3}y^3 + 6(x^2 + y^2) - 8xy$.

a) Calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}}f(-1,0)$, dove $\underline{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Poiché le derivate parziali di f,

$$f_x = 4xy + 12x - 8y, \qquad f_y = 2x^2 + 2y^2 + 12y - 8x,$$

sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$, essa è differenziabile ovunque e quindi possiamo utilizzare la formula del gradiente. Pertanto

$$D_{\underline{v}}f(-1,0) = f_x(-1,0)\frac{\sqrt{2}}{2} + f_y(-1,0)\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

b) Mostrare che i punti $O(0,0)$, $A(4,-6)$, $B(5,-5)$ e $C(-1,-1)$ sono punti critici di f.

Basta mostrare che le coordinate dei punti assegnati risolvono il sistema

$$\begin{cases} 4xy + 12x - 8y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 12y - 8x = 0 \end{cases}$$

c) Dimostrare che f non ha altri punti critici.

In questo caso bisogna risolvere il sistema del punto precedente e verificare che non ha altre soluzioni. La prima equazione può essere riscritta

$$(4y + 12)x - 8y = 0.$$

Si può osservare che $y = -3$ non dà luogo a soluzioni e quindi si ottiene $x = \frac{2y}{y+3}$. Sostituendo nella seconda si ottiene una frazione il cui numeratore è fattorizzabile come $y(y+6)(y+5)(y+1)$. (Nota1: la fattorizzazione è già data nel punto precedente perché le quattro soluzioni dell'equazione sono indicate). Si arriva pertanto ai quattro punti O, A, B e C. (Nota2: si poteva altresì osservare che il sistema è il sistema dell'intersezione tra una circonferenza e un'iperbole (equilatera) e quindi non ci potevano essere più di quattro soluzioni).

d) Determinare gli estremi relativi di f.

Dobbiamo ora studiare la natura dei punti critici. Le derivate seconde di f sono

$$f_{xx} = 4y + 12, \quad f_{xy} = 4x - 8, \quad f_{yy} = 4y + 12.$$

La matrice hessiana di f in O,

$$Hf(0,0) = 2\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix},$$

è definita positiva e quindi O è un punto di minimo relativo. Quella in A,

$$Hf(4,-6) = 2\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix},$$

è definita negativa e quindi A è un punto di massimo relativo. Quelle in B e in C,

$$Hf(5,-5) = 2\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \qquad Hf(-1,-1) = 2\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix},$$

sono entrambe indefinite e quindi B e C sono punti di sella.

e) (Facoltativo) Si determinino gli estremi assoluti di f.

Abbiamo che $f(0,y) = \frac{2}{3}y^3 + 6y^2$. Basta quindi osservare che

$$\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = +\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} f(0,y) = -\infty$$

per concludere che f non può avere estremi assoluti.

Esercizio 5. Si consideri la curva

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} \\ y(t) = t - \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \end{cases} \qquad t \in [-1,1]$$

e si indichi con γ il suo sostegno.

a) La curva è regolare?

Posto $\underline{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{2}{e^t+e^{-t}}, t - \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}})$, abbiamo che

$$\underline{r}'(t) = \left(-2\frac{e^t - e^{-t}}{(e^t+e^{-t})^2}, \frac{(e^t - e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}\right).$$

Si vede subito che $\mathbf{r}'(0) = (0,0)$ e quindi la curva non è regolare.

b) Dopo aver verificato che γ passa per il punto $P(\frac{4}{5}, \ln 2 - \frac{3}{5})$, si scriva l'equazione della retta tangente a γ in tale punto.

Abbiamo che $\underline{r}(\ln 2) = (\frac{4}{5}, \ln 2 - \frac{3}{5})$ sono proprio le coordinate di P. Poiché $\ln 2 \in [-1,1]$, il punto P appartiene al sostegno γ. Si ha poi che

$$\underline{r}'(\ln 2) = (x'(\ln 2), y'(\ln 2)) = \left(-\frac{12}{25}, \frac{9}{25}\right),$$

cosicché la retta tangente cercata ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5} - \frac{12}{25}\tau \\ y = \ln 2 - \frac{3}{5} + \frac{9}{25}\tau \end{cases}$$