Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
14 luglio 2010 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".

Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Dire se il sistema seguente ha soluzioni e, se sì, quante sono. Non si richiede la soluzione esplicita del sistema. **Attenzione**: il calcolo di un determinante 4×4 è lungo e pericoloso.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2x - y - z = -4 \\ y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Segnalo a chiunque volesse calcolare il determinante 4×4 lo stesso che la regola di Sarrus ha delle ipotesi precise.
Non usarla.
Funziona solo e soltanto per i determinanti 3×3 (e 1×1) quindi NON SI PUÒ USARE IN NESSUN ALTRO CASO.

Vorremmo usare il teorema di Rouché–Capelli. La matrice dei coefficienti ha 4 righe e 3 colonne quindi ha al massimo caratteristica (rango) 3. La matrice completa invece è quadrata di lato 4 e potrebbe aver caratteristica 4.
Il testo sconsiglia il calcolo del determinante della matrice completa quindi iniziamo per semplificare il sistema. Si può usare la prima equazione per eliminare la x delle altre.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ y + 2z = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Possiamo usare che $y = 1$ nella quarta equazione per semplificare le altre, otteniamo

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ z = 1 \\ 2z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

quindi c'è un'unica soluzione $x = y = z = 1$.
A questo punto il teorema di Rouché–Capelli è facile da usare (ma anche un po' inutile): la prima, seconda e quarta equazione determinano la caratteristica della matrice dei coefficienti (quindi 3) e la matrice completa ha determinante 0 (non è più complicato da calcolare perché ha due righe proporzionali) quindi la matrice completa ha rango minore di 4; siccome contiene una sottomatrice di caratteristica 3 non può avere caratteristica minore di 3; quindi ha rango 3.

Esercizio 2. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 - 16x - 4y - 4z + 16 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -8 & -2 & -2 & 16 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0,0,4)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0,0,4,1)A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $4x + y + z - 4 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x-2)^2 + (y-2)^2 - 4(z+1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x - 2\\ y' = y - 2\\ z' = z + 1\end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$f(P) = 2P''(x) - x^2P'(x) + 2xP(x+1)$$

a) Sia M la matrice di f prendendo la base $\{1, x, x^2\}$ nello spazio di partenza e la base $\{1, x-3, x^2-3x+9\}$ nello spazio di arrivo. Mostrare che $M = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 10\\ 2 & 5 & 14\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$

Abbiamo

$$\begin{aligned} f(1) &= 2x\\ f(x) &= x^2 + 2x\\ f(x^2) &= 4x^2 + 2x + 4\end{aligned}$$

Poniamo $\underline{v}_1 = 1$, $\underline{v}_2 = x - 3$, $\underline{v}_3 = x^2 - 3x + 9$ (i tre vettori della base di arrivo). Si può semplicemente verificare se

$$\begin{aligned} f(1) &= 6\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 \\ f(x) &= 6\underline{v}_1 + 5\underline{v}_2 + \underline{v}_3 \\ f(x^2) &= 10\underline{v}_1 + 14\underline{v}_2 + 4\underline{v}_3 \end{aligned}$$

Svolgiamo i calcoli nel caso in cui non si diponesse della matrice M. Una soluzione per semplificare i calcoli è di osservare che $x = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_1$ e $x^2 = \underline{v}_3 + 3\underline{v}_2$. Se no si devono risolvere le equazioni

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{21}(x-3) + a_{31}(x^2 - 3x + 9) &= 2x \\ a_{12} + a_{22}(x-3) + a_{32}(x^2 - 3x + 9) &= x^2 + 2x \\ a_{13} + a_{23}(x-3) + a_{33}(x^2 - 3x + 9) &= 4x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

Si trova che la matrice di f in quelle basi è

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di f.

Ci sono almeno due metodi per trovare la soluzione.

La prima è di calcolare

$$f(ax^2 + bx + c) = (4a + b)x^2 + 2(a + b + c)x + 4a$$

da cui si deduce che un vettore $ax^2 + bx + c$ del nucleo di f ha $a = 0$, $4a + b = 0$ (quindi $b = 0$) e $2(a + b + c) = 0$ (quindi $c = 0$) da cui il nucleo è ridotto al vettore nullo e quindi l'immagine è di dimensione 3, cioè è tutto $\mathbb{R}_2[x]$.

La seconda è di sfruttare la matrice appena calcolata, sottraendo 4 volte la seconda colonna alla terza si ottiene

$$M_2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -14 \\ 2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e aggiungendoci 3 volte la prima si ottiene

$$M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice M_3 ha caratteristica 3 e quindi anche M_2 e M (perché hanno la stessa caratteristica di M_3). L'immagine di f ha quindi dimensione 3 e quindi il suo nucleo ha dimensione 0.

Esercizio 4c. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia, per $k \in \mathbb{R}$, $I_k : V \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione tale che

$$I_k(f) = \int_{-2}^{2} \big(f(t+1) + (k-3)f(t)^2 + k^2 - 9\big)\,\mathrm{d}t\ .$$

Determinare per quale valore di k l'applicazione I_k è lineare.

Una condizione necessaria per essere lineare è che l'immagine del vettore nullo (qui la funzione nulla) sia il vettore nullo (qui il numero 0). Sia $\underline{0}$ la funzione nulla, allora

$$\begin{aligned} I_k(\underline{0}) &= \int_{-2}^{2} \big(0 + (k-3)0 + k^2 - 9\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \big[(k^2-9)t\big]_{t=-2}^{t=2} \\ &= 2(k^2-9) + 2(k^2-9) \\ &= 4(k^2-9)\ . \end{aligned}$$

Quindi è necessario che k sia uguale a ± 3.
Se $k = \pm 3$, I_k diventa

$$I_k(f) = \int_{-2}^{2} \big(f(t+1) + (k-3)f(t)^2\big)\,\mathrm{d}t\ .$$

Consideriamo la funzione u costante uguale a 1. Allora

$$I_k(u) = \int_{-2}^{2} \big(1 + (k-3)1\big)\,\mathrm{d}t = 4k - 8$$

mentre

$$I_k(2u) = \int_{-2}^{2} \big(2 + (k-3)4\big)\,\mathrm{d}t = 16k - 40\ .$$

Dobbiamo avere $16k - 40 = 2(4k-8)$ e quindi $k = 3$. A questo punto

$$I_3(f) = \int_{-2}^{2} f(t+1)\,\mathrm{d}t$$

è lineare per le proprietà generali degli integrali (l'integrale della somma è la somma degli integrali e l'integrale di un multiplo è il multiplo dell'integrale).

Esercizio 5c. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

a) Esiste una base (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Determiniamo anzitutto gli autovalori di A, calcolando

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -6 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 3 & 1 & -6-\lambda \end{vmatrix}$$

aggiungendo la terza colonna alla prima

$$=\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & -6 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -3-\lambda & 1 & -6-\lambda \end{vmatrix}=(-3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -6-\lambda \end{vmatrix}$$

sottraendo la prima riga alla terza

$$=(-3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=(-3-\lambda)(\lambda^2-1).$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=1$ e $\lambda_3=-1$, tutti e tre (reali e) semplici. Pertanto la matrice è diagonalizzabile, il che significa che esiste una base di autovettori di A.

Determiniamo ora tale base, calcolando gli autovettori di A. Per quanto riguarda $\lambda_1=-3$, si tratta di trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$(A+3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A+3I_3=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

il sistema è

$$\begin{cases} 6x+2y-6z=0 \\ x+3y-z=0 \\ 3x+y-3z=0 \end{cases}$$

La prima equazione è il doppio della terza, quindi è facile vedere che le soluzioni cercate sono $x=z$ e $y=0$, con $z\neq 0$. Quindi gli autovettori relativi a λ_1 sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_1=(1,0,1)_T$.

Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_1=-3\underline{v}_1$.

Allo stesso modo, si trova che gli autovettori relativi a $\lambda_2=1$ sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_2=(2,1,1)_T$, mentre quelli relativi a $\lambda_3=-1$ sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_3=(2,-1,1)_T$. In conclusione, $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ è una base di autovettori di A.

b) Esistono una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile S tali che $\Lambda = S^{-1}AS$? In caso affermativo, esibirle.

Abbiamo già visto che la matrice A è diagonalizzabile. Quindi si ha che $\Lambda = S^{-1}AS$, dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S = (\underline{v}_1|\underline{v}_2|\underline{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Appello

Esercizio 3a. Sia $z = -4 + 4i$. Dopo aver determinato modulo e argomento di z, calcolarne le sue radici quinte ω_k.

Abbiamo

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{1+1} = 4\sqrt{2}\ .$$

L'argomento di z è l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = -\frac{4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,$$

quindi $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Le radici quinte di z hanno modulo uguale a $\sqrt[5]{|z|} = \sqrt{2}$ e argomento $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$. Si tratta quindi dei complessi

$$\omega_k = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{20} + \frac{2ik\pi}{5}}$$

con $k = 0, ..., 4$ (oppure $k = -2, ..., 2$).
Tra gli argomenti delle radici quinte calcolate uno è un angolo notevole. Esplicitare la parte reale e la parte immaginaria dell'ω_k corrispondente.

I vari argomenti sono

$$\theta_0 = \frac{3\pi}{20}\ ,\ \theta_1 = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} = \frac{11\pi}{20}\ ,\ \theta_2 = \frac{11\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} = \frac{19\pi}{20}\ ,$$
$$\theta_3 = \frac{19\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} = \frac{27\pi}{20}\ ,\ \theta_4 = \frac{27\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} = \frac{35\pi}{20} = \frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}\ .$$

Tra questi $-\frac{\pi}{4}$ è un angolo notevole e la radice corrispondente è

$$\omega_4 = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} = 1 - i$$

quindi la sua parte reale è 1 e la sua parte immaginaria è -1.

Esercizio 4a. Sia, per $k \in \mathbb{R}$,

$$W_k = \{(x + 2y + z + 1, 3x - y - 4z + k, 3x + 2y - z + 7)_T : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

a) Determinare per quale valore del parametro k il sottoinsieme W_k soddisfa la condizione necessaria per essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

La condizione necessaria affinché W sia un sottospazio vettoriale è che il vettore nullo sia un elemento di W. Esso lo sarà se e solo se esistono x, y e z tali che

$$\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + k = 0 \\ 3x + 2y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

Usando la prima equazione, eliminiamo x dalle altre 2 e otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ \quad - 7y - 7z + k - 3 = 0 \\ \quad - 4y - 4z + 4 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ \quad 7y + 7z - k + 3 = 0 \\ \quad y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

il quale è equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ k = 10 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Quindi il vettore nullo appartiene a W se e solo se $k = 10$.

b) Considerare l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, 3x - y - 4z, 3x + 2y - z)_T$$

Verificare che f è lineare e che la sua immagine ha dimensione 2.

L'applicazione f è un'applicazione lineare perché è il prodotto di una matrice per il vettore $(x, y, z)_T$. La matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

che ha la stessa caratteristica della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

la quale ha ovviamente caratteristica 2 (è chiaro per le righe). Quindi la dimensione dell'immagine di f è effettivamente 2.

c) Dedurre che per il valore di k trovato nel primo punto, W_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Il sottoinsieme W_{10} è il traslato dell'immagine di f mediante il vettore $(1, 10, 7)_T$. Si tratta quindi di un piano e abbiamo visto al primo punto che passa per l'origine. Quindi è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5a.

a) Determinare il piano π passante per il punto $A(1; 2; 0)$ ed ortogonale alla retta

$$r: \quad \begin{cases} x - y - z - 5 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Un vettore direzionale di r è dato da $(1, -1, -1) \wedge (1, 1, 0) = (1, -1, 2)$. Quindi l'equazione di π è $(x - 1) - (y - 2) + 2z = 0$, ossia $x - y + 2z + 1 = 0$.

b) Determinare il piano ρ passante per il punto $B(0; -2; 3)$, ortogonale a π e parallelo alla retta

$$s: \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

Come vettore normale al piano ρ possiamo scegliere il vettore $\underline{n}_\rho = \underline{n}_\pi \wedge \underline{v}_s$, dove $\underline{n}_\pi = (1, -1, 2)$ è normale al piano π e $\underline{v}_s = (1, 0, -2)$ è parallelo a s. Quindi $\underline{n}_\rho = (2, 4, 1)$ e l'equazione di ρ risulta essere $2x + 4y + z + 5 = 0$.

c) Trovare il punto D di s la cui distanza da $C(2; 0; 0)$ è minima.

Il punto cercato è l'intersezione tra s e il piano passante per C ed ortogonale ad s. Quest'ultimo ha equazione $x - 2z - 2 = 0$; sostituendo in essa le equazioni parametriche di s si trova che $t = -\frac{3}{5}$ e quindi che $D(\frac{2}{5}; 3; -\frac{4}{5})$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
14 luglio 2010 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".

Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Dire se il sistema seguente ha soluzioni e, se sì, quante sono. Non si richiede la soluzione esplicita del sistema. **Attenzione**: il calcolo di un determinante 4×4 è lungo e pericoloso.

$$\begin{cases} x \ - y + 3z = \ \ 3 \\ x \qquad - 6z = -3 \\ 5x - 2y \ + z = \ 10 \\ 6x + 3y + 2z = \ \ 3 \end{cases}$$

Segnalo a chiunque volesse calcolare il determinante 4×4 lo stesso che la regola di Sarrus ha delle ipotesi precise.
<u>Non usarla</u>.
<u>**Funziona solo e soltanto per i determinanti 3 × 3 (e 1×1)**</u> **quindi NON SI PUÒ USARE IN NESSUN ALTRO CASO**.

Vorremmo usare il teorema di Rouché–Capelli. La matrice dei coefficienti ha 4 righe e 3 colonne quindi ha al massimo caratteristica (rango) 3. La matrice completa invece è quadrata di lato 4 e potrebbe aver caratteristica 4.
Il testo sconsiglia il calcolo del determinante della matrice completa quindi iniziamo per semplificare il sistema. Si può usare la prima equazione per eliminare la x delle altre.

$$\begin{cases} x - y \ + 3z = \quad 3 \\ \quad y \ - 9z = \ -6 \\ \quad 3y - 14z = \ -5 \\ \quad 9y - 16z = -15 \end{cases}$$

Possiamo usare la seconda equazione per eliminare la y delle altre equazioni. Il sistema diventa

$$\begin{cases} x \ - 6z = -3 \\ y - 9z = -6 \\ \quad 13z = \ 13 \\ \quad 65z = \ 39 \end{cases}$$

Si vede che le due ultime equazioni sono incompatibili, quindi il sistema non ha soluzioni. L'interpretazione in termini del teorema di Rouché–Capelli si ottiene sottraendo 5 volte la terza alla quarta, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x \quad - 6z = \ \ -3 \\ \quad y - 9z = \ \ -6 \\ \qquad 13z = \ \ 13 \\ \qquad\quad 0 = -26 \end{cases}$$

e quindi la matrice completa del sistema ha determinante $1 \cdot 1 \cdot 13 \cdot (-26) \neq 0$ quindi ha caratteristica $4 > 3$ e quindi il sistema non ha soluzioni.

Esercizio 2. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 4z + 4 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0, 0, 1)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

ossia $-2x + y + z - 1 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 4(z + 1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 1 \end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$f(P) = 2P''(x) - x^2P'(x) + 2xP(x + 1)$$

a) Sia M la matrice di f prendendo la base $\{1, x, x^2\}$ nello spazio di partenza e la base $\{1, x + 2, x^2 + 2x + 4\}$ nello spazio di arrivo. Mostrare che $M = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Abbiamo

$$\begin{aligned} f(1) &= 2x \\ f(x) &= x^2 + 2x \\ f(x^2) &= 4x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

Poniamo $\underline{v}_1 = 1$, $\underline{v}_2 = x + 2$, $\underline{v}_3 = x^2 + 2x + 4$ (i tre vettori della base di arrivo). Si può semplicemente verificare se

$$\begin{aligned} f(1) &= -4\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 \\ f(x) &= -4\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \underline{v}_3 \\ f(x^2) &= 0\underline{v}_1 + -6\underline{v}_2 + 4\underline{v}_3 \end{aligned}$$

Svolgiamo i calcoli nel caso in cui non si diponesse della matrice M. Una soluzione per semplificare i calcoli è di osservare che $x = \underline{v}_2 - 2\underline{v}_1$ e $x^2 = \underline{v}_3 - 2\underline{v}_2$. Se no si devono risolvere le equazioni

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{21}(x+2) + a_{31}(x^2 + 2x + 4) &= 2x \\ a_{12} + a_{22}(x+2) + a_{32}(x^2 + 2x + 4) &= x^2 + 2x \\ a_{13} + a_{23}(x+2) + a_{33}(x^2 + 2x + 4) &= 4x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

Si trova che la matrice di f in quelle basi è

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di f.

Ci sono almeno due metodi per trovare la soluzione.

La prima è di calcolare

$$f(ax^2 + bx + c) = (4a + b)x^2 + 2(a + b + c)x + 4a$$

da cui si deduce che un vettore $ax^2 + bx + c$ del nucleo di f ha $a = 0$, $4a + b = 0$ (quindi $b = 0$) e $2(a + b + c) = 0$ (quindi $c = 0$) da cui il nucleo è ridotto al vettore nullo e quindi l'immagine è di dimensione 3, cioè è tutto $\mathbb{R}_2[x]$.

La seconda è di sfruttare la matrice appena calcolata, sottraendo 4 volte la seconda colonna alla terza si ottiene

$$M_2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 16 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e aggiungendoci 3 volte la prima si ottiene

$$M_3 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice M_3 ha caratteristica 3 e quindi anche M_2 e M (perché hanno la stessa caratteristica di M_3). L'immagine di f ha quindi dimensione 3 e quindi il suo nucleo ha dimensione 0.

Esercizio 4c. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia, per $k \in \mathbb{R}$, $I_k : V \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione tale che

$$I_k(f) = \int_{-2}^{2} \big(f(t+1) + (k-1)f(t)^2 + k^2 - 1\big)\, \mathrm{d}t \ .$$

Determinare per quale valore di k l'applicazione I_k è lineare.

Una condizione necessaria per essere lineare è che l'immagine del vettore nullo (qui la funzione nulla) sia il vettore nullo (qui il numero 0). Sia $\underline{0}$ la funzione nulla, allora

$$\begin{aligned} I_k(\underline{0}) &= \int_{-2}^{2} \big(0 + (k-1)0 + k^2 - 1\big)\, \mathrm{d}t \\ &= \big[(k^2-1)t\big]_{t=-2}^{t=2} \\ &= 2(k^2-1) + 2(k^2-1) \\ &= 4(k^2-1) \ . \end{aligned}$$

Quindi è necessario che k sia uguale a ± 1.
Se $k = \pm 1$, I_k diventa

$$I_k(f) = \int_{-2}^{2} \big(f(t+1) + (k-1)f(t)^2\big)\, \mathrm{d}t \ .$$

Consideriamo la funzione u costante uguale a 1. Allora

$$I_k(u) = \int_{-2}^{2} \big(1 + (k-1)1\big)\, \mathrm{d}t = 4k$$

mentre

$$I_k(2u) = \int_{-2}^{2} \big(2 + (k-1)4\big)\, \mathrm{d}t = 16k - 8 \ .$$

Dobbiamo avere $16k - 8 = 2(4k)$ e quindi $k = 1$. A questo punto

$$I_1(f) = \int_{-2}^{2} f(t+1)\, \mathrm{d}t$$

è lineare per le proprietà generali degli integrali (l'integrale della somma è la somma degli integrali e l'integrale di un multiplo è il multiplo dell'integrale).

Esercizio 5c. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Esiste una base (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Determiniamo anzitutto gli autovalori di A, calcolando

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 4 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -2 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

aggiungendo la terza colonna alla prima

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

sottraendo la prima riga alla terza

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 1).$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$, tutti e tre (reali e) semplici. Pertanto la matrice è diagonalizzabile, il che significa che esiste una base di autovettori di A.

Determiniamo ora tale base, calcolando gli autovettori di A. Per quanto riguarda $\lambda_1 = 2$, si tratta di trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

il sistema è

$$\begin{cases} -4x + 2y + 4z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è il doppio della terza, quindi è facile vedere che le soluzioni cercate sono $x = z$ e $y = 0$, con $z \neq 0$. Quindi gli autovettori relativi a λ_1 sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_1 = (1, 0, 1)_T$.

Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_1 = 2\underline{v}_1$.

Allo stesso modo, si trova che gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 1$ sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_2 = (2, 1, 1)_T$, mentre quelli relativi a $\lambda_3 = -1$ sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_3 = (2, -1, 1)_T$. In conclusione, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori di A.

b) Esistono una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile S tali che $\Lambda = S^{-1}AS$? In caso affermativo, esibirle.

Abbiamo già visto che la matrice A è diagonalizzabile. Quindi si ha che $\Lambda = S^{-1}AS$, dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S = (\underline{v}_1|\underline{v}_2|\underline{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Appello

Esercizio 3a. Sia $z = 16\sqrt{3}+16i$. Dopo aver determinato modulo e argomento di z, calcolarne le sue radici quinte ω_k.

Abbiamo

$$|z| = \sqrt{(16\sqrt{3})^2 + 16^2} = 16\sqrt{3+1} = 32\ .$$

L'argomento di z è l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = \frac{16\sqrt{3}}{32} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}\ ,$$

quindi $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Le radici quinte di z hanno modulo uguale a $\sqrt[5]{|z|} = 2$ e argomento $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$. Si tratta quindi dei complessi

$$\omega_k = 2e^{\frac{\pi}{30}+\frac{2ik\pi}{5}}$$

con $k = 0, ..., 4$ (oppure $k = -2, ..., 2$).
Tra gli argomenti delle radici quinte calcolate uno è un angolo notevole. Esplicitare la parte reale e la parte immaginaria dell'ω_k corrispondente.

I vari argomenti sono

$$\theta_0 = \frac{\pi}{30}\ ,\ \theta_1 = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{13\pi}{30}\ ,\ \theta_2 = \frac{13\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{25\pi}{30} = \frac{5\pi}{6}\ ,$$
$$\theta_3 = \frac{25\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{37\pi}{30}\ ,\ \theta_4 = \frac{37\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{49\pi}{30}\ .$$

Tra questi $\frac{5\pi}{6}$ è un angolo notevole e la radice corrispondente è

$$\omega_2 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$$

quindi la sua parte reale è $-\sqrt{3}$ e la sua parte immaginaria è 1.

Esercizio 4a. Sia, per $k \in \mathbb{R}$,

$$W_k = \{(x + 2y + 5z + 1, 3x - y + 8z + k, 3x + 2y + 11z + 7)_T : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

a) Determinare per quale valore del parametro k il sottoinsieme W_k soddisfa la condizione necessaria per essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

La condizione necessaria affinché W sia un sottospazio vettoriale è che il vettore nullo sia un elemento di W. Esso lo sarà se e solo se esistono x, y e z tali che

$$\begin{cases} x + 2y + 5z + 1 = 0 \\ 3x - y + 8z + k = 0 \\ 3x + 2y + 11z + 7 = 0 \end{cases}$$

Usando la prima equazione, eliminiamo x dalle altre 2 e otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + 5z + 1 = 0 \\ \quad - 7y - 7z + k - 3 = 0 \\ \quad - 4y - 4z + 4 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x + 2y + 5z + 1 = 0 \\ \quad 7y + 7z - k + 3 = 0 \\ \quad y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

il quale è equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y + 5z + 1 = 0 \\ k = 10 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Quindi il vettore nullo appartiene a W se e solo se $k = 10$.

b) Considerare l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 5z, 3x - y + 8z, 3x + 2y + 11z)_T$$

Verificare che f è lineare e che la sua immagine ha dimensione 2.

L'applicazione f è un'applicazione lineare perché è il prodotto di una matrice per il vettore $(x, y, z)_T$. La matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

che ha la stessa caratteristica della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

la quale ha ovviamente caratteristica 2 (è chiaro per le righe). Quindi la dimensione dell'immagine di f è effettivamente 2.

c) Dedurre che per il valore di k trovato nel primo punto, W_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Il sottoinsieme W_{10} è il traslato dell'immagine di f mediante il vettore $(1, 10, 7)_T$. Si tratta quindi di un piano e abbiamo visto al primo punto che passa per l'origine. Quindi è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5a.

a) Determinare il piano π passante per il punto $A(1; 2; 0)$ ed ortogonale alla retta

$$r: \quad \begin{cases} x + 3y - z - 5 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Un vettore direzionale di r è dato da $(1, 3, -1) \wedge (1, 1, 0) = (1, -1, -2)$. Quindi l'equazione di π è $(x - 1) - (y - 2) - 2z = 0$, ossia $x - y - 2z + 1 = 0$.

b) Determinare il piano ρ passante per il punto $B(0; -2; 3)$, ortogonale a π e parallelo alla retta

$$s: \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

Come vettore normale al piano ρ possiamo scegliere il vettore $\underline{n}_\rho = \underline{n}_\pi \wedge \underline{v}_s$, dove $\underline{n}_\pi = (1, -1, -2)$ è normale al piano π e $\underline{v}_s = (1, 0, -2)$ è parallelo a s. Quindi $\underline{n}_\rho = (2, 0, 1)$ e l'equazione di ρ risulta essere $2x + z - 3 = 0$.

c) Trovare il punto D di s la cui distanza da $C(2; 0; 0)$ è minima.

Il punto cercato è l'intersezione tra s e il piano passante per C ed ortogonale ad s. Quest'ultimo ha equazione $x - 2z - 2 = 0$; sostituendo in essa le equazioni parametriche di s si trova che $t = -\frac{3}{5}$ e quindi che $D(\frac{2}{5}; 3; -\frac{4}{5})$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
14 luglio 2010 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".

Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Dire se il sistema seguente ha soluzioni e, se sì, quante sono. Non si richiede la soluzione esplicita del sistema. **Attenzione**: il calcolo di un determinante 4×4 è lungo e pericoloso.

$$\begin{cases} x \ \ -y+3z=3 \\ 2x \ \ -y-3z=0 \\ 4x \ \ -y-2z=7 \\ 5x+4y \ \ -z=0 \end{cases}$$

Segnalo a chiunque volesse calcolare il determinante 4×4 lo stesso che la regola di Sarrus ha delle ipotesi precise.
Non usarla.
Funziona solo e soltanto per i determinanti $\mathbf{3 \times 3}$ (e 1×1) quindi NON SI PUÒ USARE IN NESSUN ALTRO CASO.

Vorremmo usare il teorema di Rouché–Capelli. La matrice dei coefficienti ha 4 righe e 3 colonne quindi ha al massimo caratteristica (rango) 3. La matrice completa invece è quadrata di lato 4 e potrebbe aver caratteristica 4.
Il testo sconsiglia il calcolo del determinante della matrice completa quindi iniziamo per semplificare il sistema. Si può usare la prima equazione per eliminare la x delle altre.

$$\begin{cases} x-y \ \ +3z= \ \ 3 \\ \quad y \ \ -9z= \ \ -6 \\ \quad 3y-14z= \ \ -5 \\ \quad 9y-16z=-15 \end{cases}$$

Possiamo usare la seconda equazione per eliminare la y delle altre equazioni. Il sistema diventa

$$\begin{cases} x \ \ -6z=-3 \\ \ y-9z=-6 \\ \quad 13z= \ 13 \\ \quad 65z= \ 39 \end{cases}$$

Si vede che le due ultime equazioni sono incompatibili, quindi il sistema non ha soluzioni. L'interpretazione in termini del teorema di Rouché–Capelli si ottiene sottraendo 5 volte la terza alla quarta, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x \quad - 6z = -3 \\ \quad y - 9z = -6 \\ \qquad 13z = 13 \\ \qquad\quad 0 = -26 \end{cases}$$

e quindi la matrice completa del sistema ha determinante $1 \cdot 1 \cdot 13 \cdot (-26) \neq 0$ quindi ha caratteristica $4 > 3$ e quindi il sistema non ha soluzioni.

Esercizio 2. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4z + 4 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0, 0, 1)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0, 0, 1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

ossia $2x + y + z - 1 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4(z+1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 1 \end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$f(P) = 2P''(x) - x^2P'(x) + 2xP(x+1)$$

a) Sia M la matrice di f prendendo la base $\{1, x, x^2\}$ nello spazio di partenza e la base $\{1, x-2, x^2-2x+4\}$ nello spazio di arrivo. Mostrare che $M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Abbiamo

$$\begin{aligned} f(1) &= 2x \\ f(x) &= x^2 + 2x \\ f(x^2) &= 4x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

Poniamo $\underline{v}_1 = 1$, $\underline{v}_2 = x - 2$, $\underline{v}_3 = x^2 - 2x + 4$ (i tre vettori della base di arrivo). Si può semplicemente verificare se

$$\begin{aligned} f(1) &= 4\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 \\ f(x) &= 4\underline{v}_1 + 4\underline{v}_2 + \underline{v}_3 \\ f(x^2) &= 8\underline{v}_1 + 10\underline{v}_2 + 4\underline{v}_3 \end{aligned}$$

Svolgiamo i calcoli nel caso in cui non si diponesse della matrice M. Una soluzione per semplificare i calcoli è di osservare che $x = \underline{v}_2 + 2\underline{v}_1$ e $x^2 = \underline{v}_3 + 2\underline{v}_2$. Se no si devono risolvere le equazioni

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{21}(x-2) + a_{31}(x^2 - 2x + 4) &= 2x \\ a_{12} + a_{22}(x-2) + a_{32}(x^2 - 2x + 4) &= x^2 + 2x \\ a_{13} + a_{23}(x-2) + a_{33}(x^2 - 2x + 4) &= 4x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

Si trova che la matrice di f in quelle basi è

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di f.

Ci sono almeno due metodi per trovare la soluzione.

La prima è di calcolare

$$f(ax^2 + bx + c) = (4a + b)x^2 + 2(a + b + c)x + 4a$$

da cui si deduce che un vettore $ax^2 + bx + c$ del nucleo di f ha $a = 0$, $4a + b = 0$ (quindi $b = 0$) e $2(a + b + c) = 0$ (quindi $c = 0$) da cui il nucleo è ridotto al vettore nullo e quindi l'immagine è di dimensione 3, cioè è tutto $\mathbb{R}_2[x]$.

La seconda è di sfruttare la matrice appena calcolata, sottraendo 4 volte la seconda colonna alla terza si ottiene

$$M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e aggiungendoci 3 volte la prima si ottiene

$$M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice M_3 ha caratteristica 3 e quindi anche M_2 e M (perché hanno la stessa caratteristica di M_3). L'immagine di f ha quindi dimensione 3 e quindi il suo nucleo ha dimensione 0.

Esercizio 4c. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia, per $k \in \mathbb{R}$, $I_k : V \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione tale che

$$I_k(f) = \int_{-2}^{2} \big(f(t+1) + (k+1)f(t)^2 + k^2 - 1\big)\, \mathrm{d}t \ .$$

Determinare per quale valore di k l'applicazione I_k è lineare.

Una condizione necessaria per essere lineare è che l'immagine del vettore nullo (qui la funzione nulla) sia il vettore nullo (qui il numero 0). Sia $\underline{0}$ la funzione nulla, allora

$$\begin{aligned} I_k(\underline{0}) &= \int_{-2}^{2} \big(0 + (k+1)0 + k^2 - 1\big)\, \mathrm{d}t \\ &= \big[(k^2-1)t\big]_{t=-2}^{t=2} \\ &= 2(k^2-1) + 2(k^2-1) \\ &= 4(k^2-1) \ . \end{aligned}$$

Quindi è necessario che k sia uguale a ± 1.
Se $k = \pm 1$, I_k diventa

$$I_k(f) = \int_{-2}^{2} \big(f(t+1) + (k+1)f(t)^2\big)\, \mathrm{d}t \ .$$

Consideriamo la funzione u costante uguale a 1. Allora

$$I_k(u) = \int_{-2}^{2} \big(1 + (k+1)1\big)\, \mathrm{d}t = 4k + 8$$

mentre

$$I_k(2u) = \int_{-2}^{2} \big(2 + (k+1)4\big)\, \mathrm{d}t = 16k + 24 \ .$$

Dobbiamo avere $16k + 24 = 2(4k+8)$ e quindi $k = -1$. A questo punto

$$I_{-1}(f) = \int_{-2}^{2} f(t+1)\, \mathrm{d}t$$

è lineare per le proprietà generali degli integrali (l'integrale della somma è la somma degli integrali e l'integrale di un multiplo è il multiplo dell'integrale).

Esercizio 5c. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

a) Esiste una base (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Determiniamo anzitutto gli autovalori di A, calcolando

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -4 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

aggiungendo la terza colonna alla prima

$$=\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -2-\lambda & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}=(-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

sottraendo la prima riga alla terza

$$=(-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=(-2-\lambda)(\lambda^2-1).$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$ e $\lambda_3=-1$, tutti e tre (reali e) semplici. Pertanto la matrice è diagonalizzabile, il che significa che esiste una base di autovettori di A.

Determiniamo ora tale base, calcolando gli autovettori di A. Per quanto riguarda $\lambda_1=-2$, si tratta di trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$(A+2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A+2I_3=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

il sistema è

$$\begin{cases} 4x+2y-4z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$$

La prima equazione è il doppio della terza, quindi è facile vedere che le soluzioni cercate sono $x=z$ e $y=0$, con $z\neq 0$. Quindi gli autovettori relativi a λ_1 sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_1=(1,0,1)_T$.

Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_1=-2\underline{v}_1$.

Allo stesso modo, si trova che gli autovettori relativi a $\lambda_2=1$ sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_2=(2,1,1)_T$, mentre quelli relativi a $\lambda_3=-1$ sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_3=(2,-1,1)_T$. In conclusione, $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ è una base di autovettori di A.

b) Esistono una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile S tali che $\Lambda = S^{-1}AS$? In caso affermativo, esibirle.

Abbiamo già visto che la matrice A è diagonalizzabile. Quindi si ha che $\Lambda = S^{-1}AS$, dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S = (\underline{v}_1|\underline{v}_2|\underline{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Appello

Esercizio 3a. Sia $z = 4 + 4i$. Dopo aver determinato modulo e argomento di z, calcolarne le sue radici quinte ω_k.

Abbiamo

$$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{1+1} = 4\sqrt{2}\ .$$

L'argomento di z è l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,$$

quindi $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Le radici quinte di z hanno modulo uguale a $\sqrt[5]{|z|} = \sqrt{2}$ e argomento $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$. Si tratta quindi dei complessi

$$\omega_k = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{20} + \frac{2ik\pi}{5}}$$

con $k = 0, ..., 4$ (oppure $k = -2, ..., 2$).
Tra gli argomenti delle radici quinte calcolate uno è un angolo notevole. Esplicitare la parte reale e la parte immaginaria dell'ω_k corrispondente.

I vari argomenti sono

$$\theta_0 = \frac{\pi}{20}\ ,\ \theta_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} = \frac{9\pi}{20}\ ,\ \theta_2 = \frac{9\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} = \frac{17\pi}{20}\ ,$$
$$\theta_3 = \frac{17\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} = \frac{25\pi}{20} = \frac{5\pi}{4}\ ,\ \theta_4 = \frac{25\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} = \frac{33\pi}{20}\ .$$

Tra questi $\frac{5\pi}{4}$ è un angolo notevole e la radice corrispondente è

$$\omega_3 = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}} = -1 - i$$

quindi la sua parte reale è -1 e la sua parte immaginaria è -1.

Esercizio 4a. Sia, per $k \in \mathbb{R}$,

$$W_k = \{(x + 2y + 4z + 1, 3x - y + 5z + k, 3x + 2y + 8z + 7)_T : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

a) Determinare per quale valore del parametro k il sottoinsieme W_k soddisfa la condizione necessaria per essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

La condizione necessaria affinché W sia un sottospazio vettoriale è che il vettore nullo sia un elemento di W. Esso lo sarà se e solo se esistono x, y e z tali che

$$\begin{cases} x + 2y + 4z + 1 = 0 \\ 3x - y + 5z + k = 0 \\ 3x + 2y + 8z + 7 = 0 \end{cases}$$

Usando la prima equazione, eliminiamo x dalle altre 2 e otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + 4z + 1 = 0 \\ \quad - 7y - 7z + k - 3 = 0 \\ \quad - 4y - 4z + 4 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x + 2y + 4z + 1 = 0 \\ \quad 7y + 7z - k + 3 = 0 \\ \quad y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

il quale è equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y + 4z + 1 = 0 \\ k = 10 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Quindi il vettore nullo appartiene a W se e solo se $k = 10$.

b) Considerare l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 4z, 3x - y + 5z, 3x + 2y + 8z)_T$$

Verificare che f è lineare e che la sua immagine ha dimensione 2.

L'applicazione f è un'applicazione lineare perché è il prodotto di una matrice per il vettore $(x, y, z)_T$. La matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

che ha la stessa caratteristica della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

la quale ha ovviamente caratteristica 2 (è chiaro per le righe). Quindi la dimensione dell'immagine di f è effettivamente 2.

c) Dedurre che per il valore di k trovato nel primo punto, W_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Il sottoinsieme W_{10} è il traslato dell'immagine di f mediante il vettore $(1, 10, 7)_T$. Si tratta quindi di un piano e abbiamo visto al primo punto che passa per l'origine. Quindi è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5a.

a) Determinare il piano π passante per il punto $A(1; 2; 0)$ ed ortogonale alla retta

$$r : \qquad \begin{cases} x + 2y - z - 5 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Un vettore direzionale di r è dato da $(1, 2, -1) \wedge (1, 1, 0) = (1, -1, -1)$. Quindi l'equazione di π è $(x - 1) - (y - 2) - z = 0$, ossia $x - y - z + 1 = 0$.

b) Determinare il piano ρ passante per il punto $B(0; -2; 3)$, ortogonale a π e parallelo alla retta

$$s : \qquad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

Come vettore normale al piano ρ possiamo scegliere il vettore $\underline{n}_\rho = \underline{n}_\pi \wedge \underline{v}_s$, dove $\underline{n}_\pi = (1, -1, -1)$ è normale al piano π e $\underline{v}_s = (1, 0, -2)$ è parallelo a s. Quindi $\underline{n}_\rho = (2, 1, 1)$ e l'equazione di ρ risulta essere $2x + y + z - 1 = 0$.

c) Trovare il punto D di s la cui distanza da $C(2; 0; 0)$ è minima.

Il punto cercato è l'intersezione tra s e il piano passante per C ed ortogonale ad s. Quest'ultimo ha equazione $x - 2z - 2 = 0$; sostituendo in essa le equazioni parametriche di s si trova che $t = -\frac{3}{5}$ e quindi che $D(\frac{2}{5}; 3; -\frac{4}{5})$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
14 luglio 2010 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".

Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Dire se il sistema seguente ha soluzioni e, se sì, quante sono. Non si richiede la soluzione esplicita del sistema. **Attenzione**: il calcolo di un determinante 4×4 è lungo e pericoloso.

$$\begin{cases} x \ +y \ +z = 3 \\ -3x - 2y - 2z = -7 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

Segnalo a chiunque volesse calcolare il determinante 4×4 lo stesso che la regola di Sarrus ha delle ipotesi precise.
Non usarla.
Funziona solo e soltanto per i determinanti 3×3 (e 1×1) quindi NON SI PUÒ USARE IN NESSUN ALTRO CASO.

Vorremmo usare il teorema di Rouché–Capelli. La matrice dei coefficienti ha 4 righe e 3 colonne quindi ha al massimo caratteristica (rango) 3. La matrice completa invece è quadrata di lato 4 e potrebbe aver caratteristica 4.
Il testo sconsiglia il calcolo del determinante della matrice completa quindi iniziamo per semplificare il sistema. Si può usare la prima equazione per eliminare la x delle altre.

$$\begin{cases} x + y \ + z = 3 \\ y \ + z = 2 \\ y + 2z = 3 \\ y \qquad = 1 \end{cases}$$

Possiamo usare che $y = 1$ nella quarta equazione per semplificare le altre, otteniamo

$$\begin{cases} x \ + z = 2 \\ z = 1 \\ 2z = 2 \\ y \qquad = 1 \end{cases}$$

quindi c'è un'unica soluzione $x = y = z = 1$.
A questo punto il teorema di Rouché–Capelli è facile da usare (ma anche un po' inutile): la prima, seconda e quarta equazione determinano la caratteristica della matrice dei coefficienti (quindi 3) e la matrice completa ha determinante 0 (non è più complicato da calcolare perché ha due righe proporzionali) quindi la matrice completa ha rango minore di 4; siccome contiene una sottomatrice di caratteristica 3 non può avere caratteristica minore di 3; quindi ha rango 3.

Esercizio 2. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$4x^2 + y^2 + 16x - 4y - 4z + 16 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 8 & -2 & -2 & 16 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che non può essere soddisfatta (basta osservare la terza riga di A). Quindi σ non ha punti doppi.

b) La quadrica σ ha un centro? In caso affermativo, determinarlo.

Il centro di σ è dato dalla (eventuale) soluzione del sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Osservando la terza riga di B è facile capire che il sistema non ha soluzioni. Pertanto σ non è una quadrica a centro.

c) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(0,0,4)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(0,0,4,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0\ ,$$

ossia $-4x + y + z - 4 = 0$.

d) Dopo aver portato σ in forma canonica, riconoscere di che quadrica si tratta.

Basta riscrivere l'equazione di σ nella forma

$$4(x+2)^2 + (y-2)^2 - 4(z+1) = 0$$

ed effettuare la traslazione

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-2 \\ z' = z+1 \end{cases}$$

per arrivare alla forma canonica $z' = (x')^2 + \frac{(y')^2}{4}$. La quadrica σ è quindi un paraboloide ellittico. Ciò conferma la non esistenza del centro di σ.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$f(P) = 2P''(x) - x^2P'(x) + 2xP(x+1)$$

a) Sia M la matrice di f prendendo la base $\{1, x, x^2\}$ nello spazio di partenza e la base $\{1, x+3, x^2+3x+9\}$ nello spazio di arrivo. Mostrare che $M = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -2 \\ 2 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Abbiamo

$$\begin{aligned} f(1) &= 2x \\ f(x) &= x^2 + 2x \\ f(x^2) &= 4x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

Poniamo $\underline{v}_1 = 1$, $\underline{v}_2 = x + 3$, $\underline{v}_3 = x^2 + 3x + 9$ (i tre vettori della base di arrivo). Si può semplicemente verificare se

$$\begin{aligned} f(1) &= -6\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 \\ f(x) &= -6\underline{v}_1 + -1\underline{v}_2 + \underline{v}_3 \\ f(x^2) &= -2\underline{v}_1 + -10\underline{v}_2 + 4\underline{v}_3 \end{aligned}$$

Svolgiamo i calcoli nel caso in cui non si diponesse della matrice M. Una soluzione per semplificare i calcoli è di osservare che $x = \underline{v}_2 - 3\underline{v}_1$ e $x^2 = \underline{v}_3 - 3\underline{v}_2$. Se no si devono risolvere le equazioni

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{21}(x+3) + a_{31}(x^2+3x+9) &= 2x \\ a_{12} + a_{22}(x+3) + a_{32}(x^2+3x+9) &= x^2 + 2x \\ a_{13} + a_{23}(x+3) + a_{33}(x^2+3x+9) &= 4x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

Si trova che la matrice di f in quelle basi è

$$M = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -2 \\ 2 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di f.

Ci sono almeno due metodi per trovare la soluzione.

La prima è di calcolare

$$f(ax^2 + bx + c) = (4a + b)x^2 + 2(a + b + c)x + 4a$$

da cui si deduce che un vettore $ax^2 + bx + c$ del nucleo di f ha $a = 0$, $4a + b = 0$ (quindi $b = 0$) e $2(a + b + c) = 0$ (quindi $c = 0$) da cui il nucleo è ridotto al vettore nullo e quindi l'immagine è di dimensione 3, cioè è tutto $\mathbb{R}_2[x]$.

La seconda è di sfruttare la matrice appena calcolata, sottraendo 4 volte la seconda colonna alla terza si ottiene

$$M_2 = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 22 \\ 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e aggiungendoci 3 volte la prima si ottiene

$$M_3 = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice M_3 ha caratteristica 3 e quindi anche M_2 e M (perché hanno la stessa caratteristica di M_3). L'immagine di f ha quindi dimensione 3 e quindi il suo nucleo ha dimensione 0.

Esercizio 4c. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia, per $k \in \mathbb{R}$, $I_k : V \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione tale che

$$I_k(f) = \int_{-2}^{2} \big(f(t+1) + (k-2)f(t)^2 + k^2 - 4\big)\,\mathrm{d}t\ .$$

Determinare per quale valore di k l'applicazione I_k è lineare.

Una condizione necessaria per essere lineare è che l'immagine del vettore nullo (qui la funzione nulla) sia il vettore nullo (qui il numero 0). Sia $\underline{0}$ la funzione nulla, allora

$$\begin{aligned} I_k(\underline{0}) &= \int_{-2}^{2} \big(0 + (k-2)0 + k^2 - 4\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \big[(k^2-4)t\big]_{t=-2}^{t=2} \\ &= 2(k^2-4) + 2(k^2-4) \\ &= 4(k^2-4)\ . \end{aligned}$$

Quindi è necessario che k sia uguale a ± 2.
Se $k = \pm 2$, I_k diventa

$$I_k(f) = \int_{-2}^{2} \big(f(t+1) + (k-2)f(t)^2\big)\,\mathrm{d}t\ .$$

Consideriamo la funzione u costante uguale a 1. Allora

$$I_k(u) = \int_{-2}^{2} \big(1 + (k-2)1\big)\,\mathrm{d}t = 4k - 4$$

mentre

$$I_k(2u) = \int_{-2}^{2} \big(2 + (k-2)4\big)\,\mathrm{d}t = 16k - 24\ .$$

Dobbiamo avere $16k - 24 = 2(4k-4)$ e quindi $k = 2$. A questo punto

$$I_2(f) = \int_{-2}^{2} f(t+1)\,\mathrm{d}t$$

è lineare per le proprietà generali degli integrali (l'integrale della somma è la somma degli integrali e l'integrale di un multiplo è il multiplo dell'integrale).

Esercizio 5c. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

a) Esiste una base (di $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A? In caso affermativo, esibirla.

Determiniamo anzitutto gli autovalori di A, calcolando

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 6 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -3 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

aggiungendo la terza colonna alla prima

$$=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 6 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 3-\lambda & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

sottraendo la prima riga alla terza

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda^2-1).$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$ e $\lambda_3=-1$, tutti e tre (reali e) semplici. Pertanto la matrice è diagonalizzabile, il che significa che esiste una base di autovettori di A.

Determiniamo ora tale base, calcolando gli autovettori di A. Per quanto riguarda $\lambda_1=3$, si tratta di trovare le soluzioni non nulle del sistema

$$(A-3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A-3I_3=\begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

il sistema è

$$\begin{cases} -6x+2y+6z=0 \\ x-3y-z=0 \\ -3x+y+3z=0 \end{cases}$$

La prima equazione è il doppio della terza, quindi è facile vedere che le soluzioni cercate sono $x=z$ e $y=0$, con $z\neq 0$. Quindi gli autovettori relativi a λ_1 sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_1=(1,0,1)_T$.

Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v}_1=3\underline{v}_1$.

Allo stesso modo, si trova che gli autovettori relativi a $\lambda_2=1$ sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_2=(2,1,1)_T$, mentre quelli relativi a $\lambda_3=-1$ sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_3=(2,-1,1)_T$. In conclusione, $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ è una base di autovettori di A.

b) Esistono una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile S tali che $\Lambda = S^{-1}AS$? In caso affermativo, esibirle.

Abbiamo già visto che la matrice A è diagonalizzabile. Quindi si ha che $\Lambda = S^{-1}AS$, dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S = (\underline{v}_1|\underline{v}_2|\underline{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Appello

Esercizio 3a. Sia $z = 16+16\sqrt{3}\,i$. Dopo aver determinato modulo e argomento di z, calcolarne le sue radici quinte ω_k.

Abbiamo

$$|z| = \sqrt{16^2 + (16\sqrt{3})^2} = 16\sqrt{3+1} = 32\ .$$

L'argomento di z è l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{16\sqrt{3}}{32} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

quindi $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Le radici quinte di z hanno modulo uguale a $\sqrt[5]{|z|} = 2$ e argomento $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$. Si tratta quindi dei complessi

$$\omega_k = 2e^{\frac{\pi}{15} + \frac{2ik\pi}{5}}$$

con $k = 0, ..., 4$ (oppure $k = -2, ..., 2$).
Tra gli argomenti delle radici quinte calcolate uno è un angolo notevole. Esplicitare la parte reale e la parte immaginaria dell'ω_k corrispondente.

I vari argomenti sono

$$\theta_0 = \frac{\pi}{15}\ ,\ \theta_1 = \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} = \frac{7\pi}{15}\ ,\ \theta_2 = \frac{7\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} = \frac{13\pi}{15}\ ,$$
$$\theta_3 = \frac{13\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} = \frac{19\pi}{15}\ ,\ \theta_4 = \frac{19\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} = \frac{25\pi}{15} = \frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}\ .$$

Tra questi $-\frac{\pi}{3}$ è un angolo notevole e la radice corrispondente è

$$\omega_4 = 2e^{-\frac{i\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$$

quindi la sua parte reale è 1 e la sua parte immaginaria è $-\sqrt{3}$.

Esercizio 4a. Sia, per $k \in \mathbb{R}$,

$$W_k = \{(x+2y+3z+1, 3x-y+2z+k, 3x+2y+5z+7)_T : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

a) Determinare per quale valore del parametro k il sottoinsieme W_k soddisfa la condizione necessaria per essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

La condizione necessaria affinché W sia un sottospazio vettoriale è che il vettore nullo sia un elemento di W. Esso lo sarà se e solo se esistono x, y e z tali che

$$\begin{cases} x+2y+3z+1=0 \\ 3x-y+2z+k=0 \\ 3x+2y+5z+7=0 \end{cases}$$

Usando la prima equazione, eliminiamo x dalle altre 2 e otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x+2y+3z+1=0 \\ \quad -7y-7z+k-3=0 \\ \quad -4y-4z+4=0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x+2y+3z+1=0 \\ \quad 7y+7z-k+3=0 \\ \quad y+z-1=0 \end{cases}$$

il quale è equivalente a

$$\begin{cases} x+2y+3z+1=0 \\ k=10 \\ y+z=1 \end{cases}$$

Quindi il vettore nullo appartiene a W se e solo se $k=10$.

b) Considerare l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x,y,z) = (x+2y+3z, 3x-y+2z, 3x+2y+5z)_T$$

Verificare che f è lineare e che la sua immagine ha dimensione 2.

L'applicazione f è un'applicazione lineare perché è il prodotto di una matrice per il vettore $(x,y,z)_T$. La matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

che ha la stessa caratteristica della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

la quale ha ovviamente caratteristica 2 (è chiaro per le righe). Quindi la dimensione dell'immagine di f è effettivamente 2.

c) Dedurre che per il valore di k trovato nel primo punto, W_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Il sottoinsieme W_{10} è il traslato dell'immagine di f mediante il vettore $(1, 10, 7)_T$. Si tratta quindi di un piano e abbiamo visto al primo punto che passa per l'origine. Quindi è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5a.

a) Determinare il piano π passante per il punto $A(1; 2; 0)$ ed ortogonale alla retta

$$r: \quad \begin{cases} x + y - z - 5 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Un vettore direzionale di r è dato da $(1, 1, -1) \wedge (1, 1, 0) = (1, -1, 0)$. Quindi l'equazione di π è $(x - 1) - (y - 2) = 0$, ossia $x - y + 1 = 0$.

b) Determinare il piano ρ passante per il punto $B(0; -2; 3)$, ortogonale a π e parallelo alla retta

$$s: \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

Come vettore normale al piano ρ possiamo scegliere il vettore $\underline{n}_\rho = \underline{n}_\pi \wedge \underline{v}_s$, dove $\underline{n}_\pi = (1, -1, 0)$ è normale al piano π e $\underline{v}_s = (1, 0, -2)$ è parallelo a s. Quindi $\underline{n}_\rho = (2, 2, 1)$ e l'equazione di ρ risulta essere $2x + 2y + z + 1 = 0$.

c) Trovare il punto D di s la cui distanza da $C(2; 0; 0)$ è minima.

Il punto cercato è l'intersezione tra s e il piano passante per C ed ortogonale ad s. Quest'ultimo ha equazione $x - 2z - 2 = 0$; sostituendo in essa le equazioni parametriche di s si trova che $t = -\frac{3}{5}$ e quindi che $D(\frac{2}{5}; 3; -\frac{4}{5})$.