Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
30 giugno 2010 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".

Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Sia, per $k \in \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione tale che

$$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - k^3 + 1 \\ 3x + 3y + 2z \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix}$$

a) Determinare k in modo tale che f_k sia lineare.

Una condizione necessaria perché un'applicazione sia lineare è che mandi il vettore nullo sul vettore nullo. In questo caso il vettore nullo è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in ciascuno dei due spazi. Abbiamo $f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^3 + 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui è necessario che $k = 1$.

Ora, quando $k = 1$ abbiamo

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 3x + 3y + 2z \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix}$$

ed è la forma classica di un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Infatti è il prodotto di una matrice costante per il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ quindi è un'applicazione lineare.

In alternativa, per verificare esplicitamente le condizioni della definizione, siano $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\underline{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ e siano λ e μ in $\mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda\underline{v} + \mu\underline{v}') &= f_1 \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(\lambda x + \mu x') \\ 3(\lambda x + \mu x') + 3(\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z') \\ 2(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda y + \mu y') - 3(\lambda z + \mu z') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(-x) + \mu(-x') \\ \lambda(3x + 3y + 2z) + \mu(3x' + 3y' + 2z') \\ \lambda(2x - 3y - 3z) + \mu(2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(-x) \\ \lambda(3x + 3y + 2z) \\ \lambda(2x - 3y - 3z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu(-x') \\ \mu(3x' + 3y' + 2z') \\ \mu(2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} -x \\ 3x + 3y + 2z \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -x' \\ 3x' + 3y' + 2z' \\ 2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\
&= \lambda f_1(\underline{v}) + \mu f_1(\underline{v}') \ .
\end{aligned}$$

Quindi f_1 è effettivamente lineare.

b) Per il valore di k determinato, scrivere la matrice rappresentativa di f_k nella base canonica (come base di partenza) e la base costituita dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \ \text{e}\ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

come base di arrivo.

Si tratta di calcolare le coordinate di

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{e}\ f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nella base proposta. Calcoliamo quindi:

$$\underline{u}_1 = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \ \text{e}\ \underline{u}_3 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \ .$$

Per calcolare la matrice dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ x + 3y + 4z = b \\ 2x + 7y + 9z = c \end{cases}$$

con la colonna dei termini noti uguale rispettivamente a $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ e $\underline{u}_3$. Ci sono due possibilità sostanzialmente equivalenti. La prima è di risolvere i tre sistemi, la seconda è di risolvere il sistema tenendo a, b e c incognite e poi di inserire i valori in a, b e c per i tre vettori. Si trova allora

$$\begin{cases} x = a + 4b - 2c \\ y = a - 5b + 2c \\ z = -a + 3b - c \ . \end{cases}$$

Qualunque sia il metodo scelto si trova

$$\underline{u}_1 = 7\underline{v}_1 - 12\underline{v}_2 + 8\underline{v}_3, \quad \underline{u}_2 = 18\underline{v}_1 - 21\underline{v}_2 + 12\underline{v}_3, \quad \underline{u}_3 = 14\underline{v}_1 - 16\underline{v}_2 + 9\underline{v}_3 \ .$$

La matrice dell'applicazione nelle basi indicate è quindi

$$\begin{pmatrix} 7 & 18 & 14 \\ -12 & -21 & -16 \\ 8 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

a) Determinare gli autovalori (reali) e gli autovettori (reali) di A.

Per determinare gli autovalori di A, calcoliamo il suo polinomio caratteristico, ossia

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 4 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -2 & 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix}$$

aggiungendo la terza colonna alla prima

$$= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 2 & 4 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda + 2 & 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix}$$

sottraendo la prima riga alla terza

$$= (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 1).$$

Gli autovalori di A sono le radici reali di $P(\lambda)$, cioè solo $\lambda = -2$ (semplice).
Calcoliamo ora gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda = -2$. Poiché

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

tali autovettori sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y - 4z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è il doppio della terza, quindi è facile vedere che le soluzioni cercate sono $x = z$ e $y = 0$, con $z \neq 0$. Quindi gli autovettori sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v} = -2\underline{v}$.</u>

b) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$).

La matrice non è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$) perché il suo polinomio caratteristico ha radici non reali.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -3x - 7y - 4z = -14 \\ -5x - 2y + (t+2)z = -4 \end{cases}$$

al variare del parametro t.

Si può usare il teorema di Rouché–Capelli per determinare quando il sistema ha soluzioni e, quando ne ha, qual è la dimensione dello spazio delle soluzioni. La matrice dei coefficienti ha determinante uguale a $1 - t$ per cui per $t \neq 1$ il sistema ha una singola soluzione. Per $t = 1$ si verifica che sia la matrice dei coefficienti sia la matrice completa hanno caratteristica (rango) 2 e quindi il sistema ammette una retta di soluzioni. **In tutti questi calcoli si suggerisce di usare l'1 in alto a sinistra delle matrici per far comparire degli zeri.**

In alternativa si può usare la prima equazione per eliminare la variabile x del sistema. Aggiungendo 3 volte la prima equazione alla seconda e aggiungendo 5 volte la prima alla terza si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -y - z = -2 \\ 8y + (t+7)z = 16 \end{cases}$$

e, aggiungendo 8 volte la seconda alla terza si ottiene

$$\begin{cases} x + 2y \quad + z = 4 \\ \quad\quad y \quad + z = 2 \\ \quad\quad (t-1)z = 0 \end{cases}$$

Quindi per $t \neq 1$ il sistema ammette una sola soluzione: $z = 0$ nell'ultima, $y = 2$ nella seconda e quindi $x = 0$ nella prima. (La soluzione per $t = 1$ è sotto).
Risolvere il sistema per $t = 1$.

Invece per $t = 1$ nell'ultima z è indeterminato, $y = 2 - z$ nella seconda e quindi $x = 4 - 2y - z = z$. **Si inseriscono le soluzioni nelle equazioni per verificare che sono effettivamente soluzioni.**

Esercizio 4c. Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari. Per quelle che lo sono, determinare una base del nucleo e dell'immagine.

a) $$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (5+i)z - (2-2i)\overline{z} \end{aligned}$$

Se z e $z' \in \mathbb{C}$, sappiamo che $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ per cui

$$\begin{aligned} f_1(z+z') &= (5+i)(z+z') - (2-2i)\left(\overline{z+z'}\right) \\ &= (5+i)z + (5+i)z' - (2-2i)\left(\overline{z} + \overline{z'}\right) \\ &= (5+i)z + (5+i)z' - (2-2i)\overline{z} + (2-2i)\overline{z'} \\ &= f_1(z) + f_1(z') \ . \end{aligned}$$

D'altra parte, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z} = \lambda \overline{z}$ perché siccome $\lambda \in \mathbb{R}$, vale $\overline{\lambda} = \lambda$. Quindi $f_1(\lambda z) = (5+i)\cdot(\lambda z) - (2-2i)\overline{\lambda z} = \lambda(5+i)z - (2-2i)\lambda\overline{z} = \lambda f_1(z)$. Quindi f_1 è lineare. Abbiamo $f_1(1) = 5+i-2+2i = 3+3i$ e $f(i) = 5i-1+2i-2 = -3+7i$. Quindi $f_1(1)$ e $f_1(i)$ non sono proporzionali quindi l'immagine di f_1 ha dimensione almeno 2; siccome $\mathbb{C}$ ha dimensione 2, l'immagine di f_1 ha dimensione 2. Come base di dell'immagine di f_1 possiamo prendere i vettori $f_1(1)$ e $f_1(i)$ oppure 1 e i (oppure qualsiasi coppia di complessi non proporzionali). Dalla formula delle dimensioni, il nucleo di f_1 ha dimensione 0 (quindi la sua base è vuota).

b) $$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y) &\longmapsto (x+3y^3; 2x-3y) \end{aligned}$$

L'applicazione f_2 non è lineare. La presenza del cubo impedisce la linearità. Infatti $f_2(0;1) = (3;-3)$ mentre $f_2(0;2) = (24;-6) \neq 2f_2(0;1) = (6;-6)$.

Esercizio 5c. Si determini il centro, se esiste, e la forma canonica della conica di equazione

$$x^2 + 2\sqrt{3}\,xy - y^2 - 16x - 16\sqrt{3}\,y + 66 = 0 \ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}) \\ y = \frac{1}{2}(-x'\sqrt{3} + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 8(x' + y'\sqrt{3}) - 8\sqrt{3}(-x'\sqrt{3} + y') + 66 = 0,$$

ossia

$$-2(x')^2 + 2(y')^2 + 16x' - 16\sqrt{3}\,y' + 66 = 0.$$

Quest'ultima si può riscrivere come

$$-2(x' - 4)^2 + 32 + 2(y' - 4\sqrt{3})^2 - 96 + 66 = 0,$$

ossia $-(x' - 4)^2 + (y' - 4\sqrt{3})^2 + 1 = 0$. Quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 4 \\ y'' = y' - 4\sqrt{3} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $(x'')^2 - (y'')^2 = 1$. Si tratta pertanto di un'iperbole (equilatera), il cui centro ha coordinate $x'_C = 4$, $y'_C = 4\sqrt{3}$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = 8$, $y_C = 0$.
Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -8\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Appello

Esercizio 3a. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 - i)}{(1 + i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6.

Poniamo $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = 1 + i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2} \ ,$$

mentre

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = \frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{4} = -\frac{11\pi}{12} \ .$$

Quindi

$$|z^6| = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = -\frac{11\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ,$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è 8.

Esercizio 4a. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(2x - 3y + z; x + 2y + z - 1; 3x - y + 2z) : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3\}$;

W_1 non è un sottospazio vettoriale di V_1 perché non verifica la condizione necessaria. Infatti il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y + z \ \ = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni (prima più seconda meno terza dà $0 = 1$; alternativamente la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2 e la matrice completa ha caratteristica 3) quindi non esistono terne $(x; y; z)$ tali che $(2x - 3y + z; x + 2y + z - 1; 3x - y + 2z) = (0; 0; 0)$, quindi il vettore nullo non sta in W_1 e quindi W_1 non è un sottospazio vettoriale. **Attenzione:** se il sistema fosse stato determinato, allora W_1 sarebbe stato tutto $\mathbb{R}^3$ e quindi sarebbe stato un sottospazio vettoriale; in altre parole non è la presenza del -1 che impedisce il fatto di essere un sottospazio vettoriale.

b) $V_2 = \{\text{funzioni continue}\}$ e $W_2 = \left\{ f \in V : \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$;

Il sottoinsieme W_2 è un sottospazio vettoriale di V_2. Infatti l'applicazione I tale che $I(f) = \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t$ è un'applicazione lineare perché $\int_1^3 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}t$, quindi W_2 è il nucleo di I.

Esercizio 5a. Si considerino il piano π di equazione $x + y - 2z + 4 = 0$ e i punti $A(1; 0; -1)$ e $B(2; -2; 5)$.

a) Determinare la retta r passante per A e per B.

Poiché $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 6)$, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$$

b) Trovare la retta s passante per B ed ortogonale a π.

Come vettore direzionale di s possiamo scegliere il vettore $\underline{n}_\pi = (1, 1, -2)$, normale al piano π. Quindi le equazioni parametriche di s sono

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$$

c) Determinare il piano contenente le rette r ed s.

Tale piano ovviamente esiste, poiché le due rette sono incidenti nel punto B. Visto che $\underline{n}_\pi$ è il vettore direzionale di s, come vettore normale al piano cercato possiamo prendere $\overrightarrow{AB} \wedge \underline{n}_\pi = (-2, 8, 3)$. Quindi l'equazione del piano è $-2(x-1)+8y+3(z+1) = 0$, ossia $-2x + 8y + 3z + 5 = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
30 giugno 2010 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".

Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Sia, per $k \in \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione tale che

$$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 4y - k^3 + 1 \\ 3x - y - 2z \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix}$$

a) Determinare k in modo tale che f_k sia lineare.

Una condizione necessaria perché un'applicazione sia lineare è che mandi il vettore nullo sul vettore nullo. In questo caso il vettore nullo è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in ciascuno dei due spazi. Abbiamo $f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^3 + 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui è necessario che $k = 1$.

Ora, quando $k = 1$ abbiamo

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 3x - y - 2z \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix}$$

ed è la forma classica di un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Infatti è il prodotto di una matrice costante per il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ quindi è un'applicazione lineare.

In alternativa, per verificare esplicitamente le condizioni della definizione, siano $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\underline{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ e siano λ e μ in $\mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda\underline{v} + \mu\underline{v}') &= f_1 \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3(\lambda x + \mu x') + 4(\lambda y + \mu y') \\ 3(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') - 2(\lambda z + \mu z') \\ 2(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda y + \mu y') - 3(\lambda z + \mu z') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(3x + 4y) + \mu(3x' + 4y') \\ \lambda(3x - y - 2z) + \mu(3x' - y' - 2z') \\ \lambda(2x - 3y - 3z) + \mu(2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(3x + 4y) \\ \lambda(3x - y - 2z) \\ \lambda(2x - 3y - 3z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu(3x' + 4y') \\ \mu(3x' - y' - 2z') \\ \mu(2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 3x - y - 2z \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3x' + 4y' \\ 3x' - y' - 2z' \\ 2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\
&= \lambda f_1(\underline{v}) + \mu f_1(\underline{v}') \ .
\end{aligned}$$

Quindi f_1 è effettivamente lineare.

b) Per il valore di k determinato, scrivere la matrice rappresentativa di f_k nella base canonica (come base di partenza) e la base costituita dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ e } \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

come base di arrivo.

Si tratta di calcolare le coordinate di

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nella base proposta. Calcoliamo quindi:

$$\underline{u}_1 = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ e } \underline{u}_3 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \ .$$

Per calcolare la matrice dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ x + 3y + 4z = b \\ 2x + 7y + 9z = c \end{cases}$$

con la colonna dei termini noti uguale rispettivamente a $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ e $\underline{u}_3$. Ci sono due possibilità sostanzialmente equivalenti. La prima è di risolvere i tre sistemi, la seconda è di risolvere il sistema tenendo a, b e c incognite e poi di inserire i valori in a, b e c per i tre vettori. Si trova allora

$$\begin{cases} x = a + 4b - 2c \\ y = a - 5b + 2c \\ z = -a + 3b - c\ . \end{cases}$$

Qualunque sia il metodo scelto si trova

$$\underline{u}_1 = 11\underline{v}_1 - 8\underline{v}_2 + 4\underline{v}_3, \quad \underline{u}_2 = 6\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 - 4\underline{v}_3, \quad \underline{u}_3 = -2\underline{v}_1 + 4\underline{v}_2 - 3\underline{v}_3\ .$$

La matrice dell'applicazione nelle basi indicate è quindi

$$\begin{pmatrix} 11 & 6 & -2 \\ -8 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

a) Determinare gli autovalori (reali) e gli autovettori (reali) di A.

Per determinare gli autovalori di A, calcoliamo il suo polinomio caratteristico, ossia

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 6 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -3 & 1 & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

aggiungendo la terza colonna alla prima

$$= \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 2 & 6 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda + 3 & 1 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

sottraendo la prima riga alla terza

$$= (\lambda + 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda^2 + 1).$$

Gli autovalori di A sono le radici reali di $P(\lambda)$, cioè solo $\lambda = -3$ (semplice).

Calcoliamo ora gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda = -3$. Poiché

$$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

tali autovettori sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} 6x - 2y - 6z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è il doppio della terza, quindi è facile vedere che le soluzioni cercate sono $x = z$ e $y = 0$, con $z \neq 0$. Quindi gli autovettori sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v} = -3\underline{v}$.

b) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$).

La matrice non è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$) perché il suo polinomio caratteristico ha radici non reali.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -4x - 9y - 5z = -18 \\ -6x - 4y + (t+1)z = -8 \end{cases}$$

al variare del parametro t.

Si può usare il teorema di Rouché–Capelli per determinare quando il sistema ha soluzioni e, quando ne ha, qual è la dimensione dello spazio delle soluzioni. La matrice dei coefficienti ha determinante uguale a $1 - t$ per cui per $t \neq 1$ il sistema ha una singola soluzione. Per $t = 1$ si verifica che sia la matrice dei coefficienti sia la matrice completa hanno caratteristica (rango) 2 e quindi il sistema ammette una retta di soluzioni. **In tutti questi calcoli si suggerisce di usare l'1 in alto a sinistra delle matrici per far comparire degli zeri.**

In alternativa si può usare la prima equazione per eliminare la variabile x del sistema. Aggiungendo 4 volte la prima equazione alla seconda e aggiungendo 6 volte la prima alla terza si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -y - z = -2 \\ 8y + (t+7)z = 16 \end{cases}$$

e, aggiungendo 8 volte la seconda alla terza si ottiene

$$\begin{cases} x + 2y \quad + z = 4 \\ \qquad y \quad + z = 2 \\ \qquad (t-1)z = 0 \end{cases}$$

Quindi per $t \neq 1$ il sistema ammette una sola soluzione: $z = 0$ nell'ultima, $y = 2$ nella seconda e quindi $x = 0$ nella prima. (La soluzione per $t = 1$ è sotto).
Risolvere il sistema per $t = 1$.

Invece per $t = 1$ nell'ultima z è indeterminato, $y = 2 - z$ nella seconda e quindi $x = 4 - 2y - z = z$. **Si inseriscono le soluzioni nelle equazioni per verificare che sono effettivamente soluzioni.**

Esercizio 4c. Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari. Per quelle che lo sono, determinare una base del nucleo e dell'immagine.

a) $\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}_1[x] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P(x) & \longmapsto \int_{-1}^{3} P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

L'applicazione f_1 è lineare. Se P, Q sono polinomi e λ e μ sono reali allora $f_1(\lambda P + \mu Q) = \int_{-1}^{3} (\lambda P + \mu Q)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{3} (\lambda P(t) + \mu Q(t))\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{3} (\lambda P(t))\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{3} (\mu Q(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{3} P(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^{3} Q(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f_1(P) + \mu f_1(Q)$. L'applicazione non è l'applicazione nulla, infatti il polinomio 1 ha per immagine $f_1(1) = \int_{-1}^{3} 1\,\mathrm{d}t = 4$ quindi la sua immagine è di dimensione almeno 1; siccome $\mathbb{R}$ è di dimensione 1, l'immagine ha dimensione 1. Quindi la formula delle dimensioni afferma che il nucleo ha dimensione 1 ed è costituito dai polinomi $ax + b$ tali che $f_1(ax + b) = 4a + 4b = 0$ cioè i multipli di $1 - x$.

b) $\begin{array}{rl} f_2 : \quad \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) & \longmapsto (2x - 3y + z; 2z; x - 3y^2 + z) \end{array}$

L'applicazione f_2 non è lineare. La presenza del quadrato impedisce la linearità. Infatti $f_2(0; 1; 0) = (-3; 0; -3)$ mentre $f_2(0; -1; 0) = (3; 0; -3) \neq -f_2(0; 1; 0) = (3; 0; 3)$.

Esercizio 5c. Si determini il centro, se esiste, e la forma canonica della conica di equazione

$$x^2 + 2\sqrt{3}\,xy - y^2 - 28x - 28\sqrt{3}\,y + 198 = 0\ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}) \\ y = \frac{1}{2}(-x'\sqrt{3} + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 14(x' + y'\sqrt{3}) - 14\sqrt{3}(-x'\sqrt{3} + y') + 198 = 0,$$

ossia

$$-2(x')^2 + 2(y')^2 + 28x' - 28\sqrt{3}\,y' + 198 = 0.$$

Quest'ultima si può riscrivere come

$$-2(x' - 7)^2 + 98 + 2(y' - 7\sqrt{3})^2 - 294 + 198 = 0,$$

ossia $-(x' - 7)^2 + (y' - 7\sqrt{3})^2 + 1 = 0$. Quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 7 \\ y'' = y' - 7\sqrt{3} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $(x'')^2 - (y'')^2 = 1$. Si tratta pertanto di un'iperbole (equilatera), il cui centro ha coordinate $x'_C = 7$, $y'_C = 7\sqrt{3}$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = 14$, $y_C = 0$.
Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ -14\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Appello

Esercizio 3a. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3} + i)(1 + i)}{(1 - i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6.

Poniamo $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 1 - i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2},$$

mentre

$$\arg z_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = -\frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12} \ .$$

Quindi

$$|z^6| = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = \frac{11\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ,$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è -8.

Esercizio 4a. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x; y; z) : -x + 2y + 5z = 0\}$;

Il sottoinsieme W_1 è un sottospazio vettoriale di V_1. È immediato osservare che il vettore nullo vi appartiene e quindi la condizione necessaria è verificata. Il sottoinsieme W_1 può esserre identificato con (a scelta) il nucleo dell'applicazione lineare $(x; y; z) \mapsto -x + 2y + 5z$ oppure come il sottospazio ortogonale al vettore $(-1; 2; 5)$ oppure come lo spazio generato da $(2; 1; 0)$ e $(5; 0; 1)$; per una qualsiasi delle tre ragioni precedenti si tratta di un sottospazio vettoriale di V_1.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ e $W_2 = \{P(x)^2 : P \in \mathbb{R}[x]\}$;

Il sottoinsieme W_2 contiene solo polinomi a valori positivi (o nulli) quindi non contiene i multipli "negativi" dei suoi elementi. In particolare contiene x^2 ma non $-x^2$ quindi non è un sottospazio vettoriale (in alternativa contiene x^2 e $x^2 + 2x + 1$ ma non la loro differenza).

Esercizio 5a. Si considerino il piano π di equazione $x + y - 2z + 4 = 0$ e i punti $A(1; 0; -1)$ e $B(2; 1; 5)$.

a) Determinare la retta r passante per A e per B.

Poiché $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 6)$, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$$

b) Trovare la retta s passante per B ed ortogonale a π.

Come vettore direzionale di s possiamo scegliere il vettore $\underline{n}_\pi = (1, 1, -2)$, normale al piano π. Quindi le equazioni parametriche di s sono

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$$

c) Determinare il piano contenente le rette r ed s.

Tale piano ovviamente esiste, poiché le due rette sono incidenti nel punto B. Visto che $\underline{n}_\pi$ è il vettore direzionale di s, come vettore normale al piano cercato possiamo prendere $\overrightarrow{AB} \wedge \underline{n}_\pi = (-8, 8, 0)$. Quindi l'equazione del piano è $-8(x-1) + 8y = 0$, ossia $-8x + 8y + 8 = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
30 giugno 2010 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".

Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Sia, per $k \in \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione tale che

$$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y - k^3 + 1 \\ 3x - z \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix}$$

a) Determinare k in modo tale che f_k sia lineare.

Una condizione necessaria perché un'applicazione sia lineare è che mandi il vettore nullo sul vettore nullo. In questo caso il vettore nullo è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in ciascuno dei due spazi. Abbiamo $f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^3 + 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui è necessario che $k = 1$.

Ora, quando $k = 1$ abbiamo

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - z \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix}$$

ed è la forma classica di un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Infatti è il prodotto di una matrice costante per il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ quindi è un'applicazione lineare.

In alternativa, per verificare esplicitamente le condizioni della definizione, siano $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\underline{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ e siano λ e μ in $\mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda \underline{v} + \mu \underline{v}') &= f_1 \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(\lambda x + \mu x') + 3(\lambda y + \mu y') \\ 3(\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z') \\ 2(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda y + \mu y') - 3(\lambda z + \mu z') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(2x + 3y) + \mu(2x' + 3y') \\ \lambda(3x - z) + \mu(3x' - z') \\ \lambda(2x - 3y - 3z) + \mu(2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(2x + 3y) \\ \lambda(3x - z) \\ \lambda(2x - 3y - 3z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu(2x' + 3y') \\ \mu(3x' - z') \\ \mu(2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - z \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2x' + 3y' \\ 3x' - z' \\ 2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\
&= \lambda f_1(\underline{v}) + \mu f_1(\underline{v}') \ .
\end{aligned}$$

Quindi f_1 è effettivamente lineare.

b) Per il valore di k determinato, scrivere la matrice rappresentativa di f_k nella base canonica (come base di partenza) e la base costituita dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{e } \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

come base di arrivo.

Si tratta di calcolare le coordinate di

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nella base proposta. Calcoliamo quindi:

$$\underline{u}_1 = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ e } \underline{u}_3 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Per calcolare la matrice dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ x + 3y + 4z = b \\ 2x + 7y + 9z = c \end{cases}$$

con la colonna dei termini noti uguale rispettivamente a $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ e $\underline{u}_3$. Ci sono due possibilità sostanzialmente equivalenti. La prima è di risolvere i tre sistemi, la seconda è di risolvere il sistema tenendo a, b e c incognite e poi di inserire i valori in a, b e c per i tre vettori. Si trova allora

$$\begin{cases} x = a + 4b - 2c \\ y = a - 5b + 2c \\ z = -a + 3b - c\ . \end{cases}$$

Qualunque sia il metodo scelto si trova

$$\underline{u}_1 = 10\underline{v}_1 - 9\underline{v}_2 + 5\underline{v}_3, \quad \underline{u}_2 = 9\underline{v}_1 - 3\underline{v}_2, \quad \underline{u}_3 = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2\ .$$

La matrice dell'applicazione nelle basi indicate è quindi

$$\begin{pmatrix} 10 & 9 & 2 \\ -9 & -3 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

a) Determinare gli autovalori (reali) e gli autovettori (reali) di A.

Per determinare gli autovalori di A, calcoliamo il suo polinomio caratteristico, ossia

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 & 8 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -4 & 1 & \lambda + 8 \end{vmatrix}$$

aggiungendo la terza colonna alla prima

$$= \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 2 & 8 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda + 4 & 1 & \lambda + 8 \end{vmatrix} = (\lambda + 4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda + 8 \end{vmatrix}$$

sottraendo la prima riga alla terza

$$= (\lambda + 4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda^2 + 1).$$

Gli autovalori di A sono le radici reali di $P(\lambda)$, cioè solo $\lambda = -4$ (semplice).

Calcoliamo ora gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda = -4$. Poiché

$$A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -8 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

tali autovettori sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} 8x - 2y - 8z = 0 \\ x + 4y - z = 0 \\ 4x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è il doppio della terza, quindi è facile vedere che le soluzioni cercate sono $x = z$ e $y = 0$, con $z \neq 0$. Quindi gli autovettori sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v} = -4\underline{v}$.</u>

b) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$).

La matrice non è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$) perché il suo polinomio caratteristico ha radici non reali.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y \quad + z = 4 \\ x + y \quad = 2 \\ -x + 6y + (t+6)z = 12 \end{cases}$$

al variare del parametro t.

Si può usare il teorema di Rouché–Capelli per determinare quando il sistema ha soluzioni e, quando ne ha, qual è la dimensione dello spazio delle soluzioni. La matrice dei coefficienti ha determinante uguale a $1 - t$ per cui per $t \neq 1$ il sistema ha una singola soluzione. Per $t = 1$ si verifica che sia la matrice dei coefficienti sia la matrice completa hanno caratteristica (rango) 2 e quindi il sistema ammette una retta di soluzioni. **In tutti questi calcoli si suggerisce di usare l'1 in alto a sinistra delle matrici per far comparire degli zeri.**

In alternativa si può usare la prima equazione per eliminare la variabile x del sistema. Togliendo la prima equazione alla seconda e aggiungendo la prima alla terza si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y \quad + z = 4 \\ -y \quad - z = -2 \\ 8y + (t+7)z = 16 \end{cases}$$

e, aggiungendo 8 volte la seconda alla terza si ottiene

$$\begin{cases} x + 2y \quad + z = 4 \\ \qquad y \quad + z = 2 \\ \qquad (t-1)z = 0 \end{cases}$$

Quindi per $t \neq 1$ il sistema ammette una sola soluzione: $z = 0$ nell'ultima, $y = 2$ nella seconda e quindi $x = 0$ nella prima. (La soluzione per $t = 1$ è sotto).
Risolvere il sistema per $t = 1$.

Invece per $t = 1$ nell'ultima z è indeterminato, $y = 2 - z$ nella seconda e quindi $x = 4 - 2y - z = z$. **Si inseriscono le soluzioni nelle equazioni per verificare che sono <u>effettivamente</u> soluzioni.**

Esercizio 4c. Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari. Per quelle che lo sono, determinare una base del nucleo e dell'immagine.

a) $$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (3-2i)z + (2+3i)\overline{z} \end{aligned}$$

Siano z e z' complessi e λ un reale. Allora

$$\begin{aligned} f(z+z') &= (3-2i)(z+z') + (2+3i)\left(\overline{z+z'}\right) \\ &= (3-2i)z + (3-2i)z' + (2+3i)(\overline{z} + \overline{z'}) \end{aligned}$$

perché $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$

$$= (3-2i)z + (3-2i)z' + (2+3i)\overline{z} + (2+3i)\overline{z'} = f_1(z) + f_1(z') \ .$$

Nello stesso modo (usando che $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z}$ e che $\overline{\lambda} = \lambda$ perché $\lambda \in \mathbb{R}$) si verifica che $f_1(\lambda z) = \lambda f(z)$. Quindi f_1 è lineare. Il suo nucleo è costituito dagli $z = x + iy$ tali che $f_1(z) = 0$ cioè (dopo semplificazione) $5(x+y) + i(x+y) = 0$ e quindi tali che $y = -x$ ovvero i multipli di $1 - i$. Dal teorema delle dimensioni l'immagine ha dimensione 1 e quindi una sua base è l'immagine di un qualsiasi vettore che non appartiene al nucleo, per esempio $f_1(1) = 5 + i$.

b) $$\begin{aligned} f_2 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x;y) &\longmapsto (x+2y; x^2 - 3y; 2y) \end{aligned}$$

L'applicazione f_2 non è lineare. La presenza del quadrato impedisce la linearità. Infatti $f_2(1;0) = (1;1;0)$, mentre $f_2(-1;0) = (-1;1;0) \neq -f_2(1;0) = (-1;-1;0)$.

Esercizio 5c. Si determini il centro, se esiste, e la forma canonica della conica di equazione

$$x^2 + 2\sqrt{3}\,xy - y^2 - 40x - 40\sqrt{3}\,y + 402 = 0 \ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}) \\ y = \frac{1}{2}(-x'\sqrt{3} + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 20(x' + y'\sqrt{3}) - 20\sqrt{3}(-x'\sqrt{3} + y') + 402 = 0,$$

ossia

$$-2(x')^2 + 2(y')^2 + 40x' - 40\sqrt{3}\,y' + 402 = 0.$$

Quest'ultima si può riscrivere come

$$-2(x' - 10)^2 + 200 + 2(y' - 10\sqrt{3})^2 - 600 + 402 = 0,$$

ossia $-(x' - 10)^2 + (y' - 10\sqrt{3})^2 + 1 = 0$. Quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 10 \\ y'' = y' - 10\sqrt{3} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $(x'')^2 - (y'')^2 = 1$. Si tratta pertanto di un'iperbole (equilatera), il cui centro ha coordinate $x'_C = 10$, $y'_C = 10\sqrt{3}$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = 20$, $y_C = 0$.
Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 \\ -20\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Appello

Esercizio 3a. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{(1 - i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6.

Poniamo $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 1 - i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2} \ ,$$

mentre

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = -\frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} \ .$$

Quindi

$$|z^6| = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = \frac{7\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ,$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è -8.

Esercizio 4a. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x; y; z) : 2x + 3y - 2z = 3 \text{ e } -x + 2y - 3z = 0\}$;

Il sottoinsieme W_1 non è un sottospazio vettoriale di V_1 in quanto il vettore nullo non vi appartiene.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ e $W_2 = \{P : P'(x) = 0\}$;

Il sottoinsieme W_2 è costituito dai polinomi costanti, si tratta quindi del sottospazio generato dal polinomio 1.

Esercizio 5a. Si considerino il piano π di equazione $x + y - 2z + 4 = 0$ e i punti $A(1; 0; -1)$ e $B(2; 4; 5)$.

a) Determinare la retta r passante per A e per B.

Poiché $\overrightarrow{AB} = (1, 4, 6)$, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$$

b) Trovare la retta s passante per B ed ortogonale a π.

Come vettore direzionale di s possiamo scegliere il vettore $\underline{n}_\pi = (1, 1, -2)$, normale al piano π. Quindi le equazioni parametriche di s sono

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$$

c) Determinare il piano contenente le rette r ed s.

Tale piano ovviamente esiste, poiché le due rette sono incidenti nel punto B. Visto che $\underline{n}_\pi$ è il vettore direzionale di s, come vettore normale al piano cercato possiamo prendere $\overrightarrow{AB} \wedge \underline{n}_\pi = (-14, 8, -3)$. Quindi l'equazione del piano è $-14(x-1)+8y-3(z+1)=0$, ossia $-14x+8y-3z+11=0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
30 giugno 2010 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".

Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Sia, per $k \in \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione tale che

$$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - k^3 + 1 \\ 3x + y \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix}$$

a) Determinare k in modo tale che f_k sia lineare.

Una condizione necessaria perché un'applicazione sia lineare è che mandi il vettore nullo sul vettore nullo. In questo caso il vettore nullo è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in ciascuno dei due spazi. Abbiamo $f_k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^3 + 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui è necessario che $k = 1$.

Ora, quando $k = 1$ abbiamo

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + y \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix}$$

ed è la forma classica di un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Infatti è il prodotto di una matrice costante per il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ quindi è un'applicazione lineare.

In alternativa, per verificare esplicitamente le condizioni della definizione, siano $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\underline{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ e siano λ e μ in $\mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} f_1(\lambda\underline{v} + \mu\underline{v}') &= f_1 \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') \\ 3(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') \\ 2(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda y + \mu y') - 3(\lambda z + \mu z') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x + 2y) + \mu(x' + 2y') \\ \lambda(3x + y) + \mu(3x' + y') \\ \lambda(2x - 3y - 3z) + \mu(2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x + 2y) \\ \lambda(3x + y) \\ \lambda(2x - 3y - 3z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu(x' + 2y') \\ \mu(3x' + y') \\ \mu(2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + y \\ 2x - 3y - 3z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' + 2y' \\ 3x' + y' \\ 2x' - 3y' - 3z') \end{pmatrix} \\ &= \lambda f_1(\underline{v}) + \mu f_1(\underline{v}') \ . \end{aligned}$$

Quindi f_1 è effettivamente lineare.

b) Per il valore di k determinato, scrivere la matrice rappresentativa di f_k nella base canonica (come base di partenza) e la base costituita dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ e } \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

come base di arrivo.

Si tratta di calcolare le coordinate di

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nella base proposta. Calcoliamo quindi:

$$\underline{u}_1 = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ e } \underline{u}_3 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Per calcolare la matrice dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ x + 3y + 4z = b \\ 2x + 7y + 9z = c \end{cases}$$

con la colonna dei termini noti uguale rispettivamente a $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ e $\underline{u}_3$. Ci sono due possibilità sostanzialmente equivalenti. La prima è di risolvere i tre sistemi, la seconda è di risolvere il sistema tenendo a, b e c incognite e poi di inserire i valori in a, b e c per i tre vettori. Si trova allora

$$\begin{cases} x = a + 4b - 2c \\ y = a - 5b + 2c \\ z = -a + 3b - c\ . \end{cases}$$

Qualunque sia il metodo scelto si trova

$$\underline{u}_1 = 9\underline{v}_1 - 10\underline{v}_2 + 6\underline{v}_3, \quad \underline{u}_2 = 12\underline{v}_1 - 9\underline{v}_2 + 4\underline{v}_3, \quad \underline{u}_3 = 6\underline{v}_1 - 6\underline{v}_2 + 3\underline{v}_3\ .$$

La matrice dell'applicazione nelle basi indicate è quindi

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 6 \\ -10 & -9 & -6 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Determinare gli autovalori (reali) e gli autovettori (reali) di A.

Per determinare gli autovalori di A, calcoliamo il suo polinomio caratteristico, ossia

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 2 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$

aggiungendo la terza colonna alla prima

$$= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda + 1 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$

sottraendo la prima riga alla terza

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1).$$

Gli autovalori di A sono le radici reali di $P(\lambda)$, cioè solo $\lambda = -1$ (semplice).

Calcoliamo ora gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda = -1$. Poiché

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

tali autovettori sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è il doppio della terza, quindi è facile vedere che le soluzioni cercate sono $x = z$ e $y = 0$, con $z \neq 0$. Quindi gli autovettori sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si deve verificare (in brutta copia) che $A\underline{v} = -\underline{v}$.

b) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$).

La matrice non è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$) perché il suo polinomio caratteristico ha radici non reali.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Discutere l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -y - z = -2 \\ -2x + 4y + (t+5)z = 8 \end{cases}$$

al variare del parametro t.

Si può usare il teorema di Rouché–Capelli per determinare quando il sistema ha soluzioni e, quando ne ha, qual è la dimensione dello spazio delle soluzioni. La matrice dei coefficienti ha determinante uguale a $1 - t$ per cui per $t \neq 1$ il sistema ha una singola soluzione. Per $t = 1$ si verifica che sia la matrice dei coefficienti sia la matrice completa hanno caratteristica (rango) 2 e quindi il sistema ammette una retta di soluzioni. **In tutti questi calcoli si suggerisce di usare l'1 in alto a sinistra delle matrici per far comparire degli zeri.**

In alternativa si può usare la prima equazione per eliminare la variabile x del sistema. Aggiungendo 2 volte la prima alla terza si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -y - z = -2 \\ 8y + (t+7)z = 16 \end{cases}$$

e, aggiungendo 8 volte la seconda alla terza si ottiene

$$\begin{cases} x + 2y \quad + z = 4 \\ \qquad y \quad + z = 2 \\ \qquad (t-1)z = 0 \end{cases}$$

Quindi per $t \neq 1$ il sistema ammette una sola soluzione: $z = 0$ nell'ultima, $y = 2$ nella seconda e quindi $x = 0$ nella prima. (La soluzione per $t = 1$ è sotto).
Risolvere il sistema per $t = 1$.

Invece per $t = 1$ nell'ultima z è indeterminato, $y = 2 - z$ nella seconda e quindi $x = 4 - 2y - z = z$. **Si inseriscono le soluzioni nelle equazioni per verificare che sono effettivamente soluzioni.**

Esercizio 4c. Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari. Per quelle che lo sono, determinare una base del nucleo e dell'immagine.

a) $\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}_1[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ P(x) &\longmapsto P(x^2) \end{aligned}$

Siano P e Q due polinomi. Allora $f_1(P+Q) = (P+Q)(x^2) = P(x^2) + Q(x^2) = f_1(P) + f_1(Q)$. Inoltre se P è un polinomio e λ un reale, $f_1(\lambda P) = (\lambda P)(x^2) = \lambda P(x^2) = \lambda f(P)$. Quindi f_1 è lineare. Il suo nucleo è fatto dai polinomi $ax + b$ tali che $ax^2 + b$ sia il polinomio nullo, quindi $a = b = 0$ cioè il suo nucleo è ridotto al polinomio nullo. Dal teorema delle dimensioni l'immagine ha dimensione 2 ed è generata dai due polinomi $f_1(1)$ e $f_1(x)$ cioè da 1 e x^2; quindi una base dell'immagine è $\{1, x^2\}$.

b) $\begin{aligned} f_2 : \quad \mathbb{R}^3 \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y;z) &\longmapsto (2x+3y-z; 2y-3) \end{aligned}$

L'applicazione f_2 non è lineare ed si vede immediatamente perché $f_2(0;0;0) = (0;-3) \neq (0;0)$.

Esercizio 5c. Si determini il centro, se esiste, e la forma canonica della conica di equazione

$$x^2 + 2\sqrt{3}\,xy - y^2 - 52x - 52\sqrt{3}\,y + 678 = 0\ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2\sqrt{3}\,xy$, ossia diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}) \\ y = \frac{1}{2}(-x'\sqrt{3} + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 26(x' + y'\sqrt{3}) - 26\sqrt{3}(-x'\sqrt{3} + y') + 678 = 0,$$

ossia

$$-2(x')^2 + 2(y')^2 + 52x' - 52\sqrt{3}\,y' + 678 = 0.$$

Quest'ultima si può riscrivere come

$$-2(x' - 13)^2 + 338 + 2(y' - 13\sqrt{3})^2 - 1014 + 678 = 0,$$

ossia $-(x' - 13)^2 + (y' - 13\sqrt{3})^2 + 1 = 0$. Quindi la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - 13 \\ y'' = y' - 13\sqrt{3} \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica $(x'')^2 - (y'')^2 = 1$. Si tratta pertanto di un'iperbole (equilatera), il cui centro ha coordinate $x'_C = 13$, $y'_C = 13\sqrt{3}$, ossia (usando le equazioni della rotazione) $x_C = 26$, $y_C = 0$.
Si noti che il centro si poteva determinare direttamente dall'equazione della conica, risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -26 \\ -26\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Appello

Esercizio 3a. Sia

$$z = \frac{(\sqrt{3} + i)(1 - i)}{(1 + i)^2}$$

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di z^6.

Poniamo $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = 1 + i$. Allora

$$|z_1| = 2, \quad \text{e} \quad |z_2| = |z_3| = \sqrt{2}\ ,$$

mentre

$$\arg z_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}, \quad \arg z_3 = \frac{\pi}{4}$$

quindi

$$|z| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\arg z = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12} \ .$$

Quindi

$$|z^6| = 8 \quad \text{e} \quad \arg z^6 = -\frac{7\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ,$$

La parte reale di z^6 è quindi 0 mentre la sua parte immaginaria è 8.

Esercizio 4a. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^4$ e $W_1 = \{(2x-3y+2z; -x+2y-4z; 2y-3z; x-3y+z) : (x;y;z) \in \mathbb{R}^3\}$;

Il sottoinsieme W_1 è l'immagine di un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ e quindi è un sottospazio vettoriale. Si poteva giungere alla stessa conclusione osservando che

$$(2x-3y+2z; -x+2y-4z; 2y-3z; x-3y+z) = \\ x(2;-1;0;1) + y(-3;2;2;-3) + z(2;-4;-3;1)$$

e quindi che W_1 è lo spazio generato dai 3 vettori evidenziati nell'uguaglianza.

b) $V_2 = \{\text{funzioni da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{f \in V : f(3) \geqslant -1\}$;

Il sottoinsieme W_2 non è un sottospazio vettoriale in quanto la funzione costante uguale a -1 è un elemento di W_2 ma non il suo doppio.

Esercizio 5a. Si considerino il piano π di equazione $x+y-2z+4=0$ e i punti $A(1;0;-1)$ e $B(2;7;5)$.

a) Determinare la retta r passante per A e per B.

Poiché $\overrightarrow{AB} = (1,7,6)$, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 7t \\ z = -1+6t \end{cases}$$

b) Trovare la retta s passante per B ed ortogonale a π.

Come vettore direzionale di s possiamo scegliere il vettore $\underline{n}_\pi = (1,1,-2)$, normale al piano π. Quindi le equazioni parametriche di s sono

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 7+t \\ z = 5-2t \end{cases}$$

c) Determinare il piano contenente le rette r ed s.

Tale piano ovviamente esiste, poiché le due rette sono incidenti nel punto B. Visto che $\underline{n}_\pi$ è il vettore direzionale di s, come vettore normale al piano cercato possiamo prendere $\overrightarrow{AB} \wedge \underline{n}_\pi = (-20, 8, -6)$. Quindi l'equazione del piano è $-20(x-1) + 8y - 6(z+1) = 0$, ossia $-20x + 8y - 6z + 14 = 0$.