Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
28 aprile 2010 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezzo. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Determinare **le equazioni cartesiane** della retta s passante per il punto $P(-3,2,5)$ e parallela alla retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x-y-z+1=0 \\ 2x+z-6=0 \end{cases}$$

Possiamo ottenere le equazioni parametriche di r ponendo $z=t$ e ricavando dalle sue equazioni cartesiane $x=3-\frac{1}{2}t$ e $y=4-\frac{3}{2}t$. Quindi

$$r: \quad \begin{cases} x=3-\frac{1}{2}t \\ y=4-\frac{3}{2}t \\ z=t \end{cases}$$

e pertanto le equazioni parametriche della retta s sono

$$\begin{cases} x=-3-\frac{1}{2}t \\ y=2-\frac{3}{2}t \\ z=5+t \end{cases}$$

Le sue equazioni cartesiane si trovano eliminando t; per esempio, ricavando $t=z-5$ dall'ultima equazione e sosituendo nelle prime due. Si arriva a

$$s: \quad \begin{cases} x+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}=0 \\ y+\frac{3}{2}z-\frac{19}{2}=0 \end{cases}$$

Alternativamente si poteva osservare che, per ogni scelta di d_1 e d_2, la retta

$$\begin{cases} x-y-z+d_1=0 \\ 2x+z+d_2=0 \end{cases}$$

è parallela ad r. Imponendo il passaggio per $P(-3,2,5)$ otteniamo $d_1 = 10$ e $d_2 = 1$, ossia le equazioni cartesiane di s

$$\begin{cases} x - y - z + 10 = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

È facile verificare che queste equazioni sono equivalenti a quelle trovate in precedenza.

Esercizio 2. Dopo aver verificato che le rette

$$r: \quad \begin{cases} 5x - 4y - z - 12 = 0 \\ y + 3z - 9 = 0 \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 5t \end{cases}$$

sono incidenti, determinare l'equazione del piano che le contiene entrambe.

Per verificare che le rette sono incidenti basta inserire le equazioni di s in quelle di r. Si ottiene infatti il sistema

$$\begin{cases} 5(8+5t) - 4(1+t) - (8+5t) - 12 = 0 \\ 1 + t + 3(8+5t) - 9 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $t = -1$. Ciò significa che le due rette si intersecano nel punto $P(3,0,3)$.
Per determinare il piano π contenente r e s, si può considerare il fascio di piani contenente r, ossia $\lambda(5x - 4y - z - 12) + \mu(y + 3z - 9) = 0$, che ha $\underline{n} = (5\lambda, -4\lambda + \mu, -\lambda + 3\mu)$ come vettore normale. Affinché il piano contenga la retta s, il vettore $\underline{n}$ deve essere ortogonale al vettore direzionale di s, ossia a $\underline{v} = (5,1,5)$. La condizione è quindi $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$, che porta a $\mu = -\lambda$. Sostituendo nell'equazione del fascio si arriva all'equazione di π, che risulta essere $5x - 5y - 4z - 3 = 0$.
Verifica suggerita: sostituire le equazioni di s in quella di π e controllare che si ottiene un'identità.

Esercizio 3. a) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 - (4+i)z + 5 - i = 0 \ .$$

Osservazione: calcolare 13^2

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (4+i)^2 - 4(5-i) = 16 - 1 + 8i - 20 + 4i = -5 + 12i \ .$$

Possiamo calcolarne una radice quadrata, $\delta = x + iy$. Verificherà

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}\Delta = -5 \\ 2xy \quad\;\; = \operatorname{Im}\Delta = \ 12 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \quad = \ 13 \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza si trova $2x^2 = 8$, cioè $x = \pm 2$. Nella seconda si vede che $y = \pm 3$ (con lo stesso segno di x), quindi

$$\delta = 2 + 3i$$

(o il suo opposto). È allora facile vedere che le due soluzioni sono

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{4 + i + 2 + 3i}{2} = 3 + 2i \\ z_2 &= \frac{4 + i - 2 - 3i}{2} = 1 - i \end{aligned}$$

Si verifica che z_1 e z_2 sono <u>effettivamente</u> soluzioni dell'equazione.

b) Disegnare le soluzioni dell'equazione nel piano di Gauss.

c) Quali sono la somma e il prodotto delle soluzioni dell'equazione ?

In un'equazione del secondo grado

$$z^2 + bz + c = 0 \ ,$$

la somma delle soluzioni è $-b$ e il loro prodotto è c. Si può verificare facendo il calcolo.

Esercizio 4. Sia

$$z = \left(\sqrt{3} - i\right)(1 - i) \ .$$

a) Determinare modulo, argomento, parte reale e parte immaginaria di z.

Il modulo di $z_1 = \sqrt{3} - i$ è

$$\rho_1 = \sqrt{3 + 1} = 2$$

mentre il modulo di $z_2 = 1 - i$ è

$$\rho_2 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \ .$$

Siccome z è il prodotto di z_1 e z_2, il modulo di z è

$$\rho = 2\sqrt{2}.$$

L'argomento di z_1 è l'angolo θ_1 tale che

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

quindi $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$ (a meno di un multiplo di 2π). Nello stesso modo l'argomento di z_2 è $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$ (a meno di un multiplo di 2π). Quindi l'argomento di z è $\theta = \theta_1 + \theta_2 = -\frac{5\pi}{12}$ (a meno di un multiplo di 2π).

Calcolando il prodotto, vediamo che

$$z = \sqrt{3} - 1 - i\left(\sqrt{3} + 1\right) .$$

Quindi

La parte reale di z è	$\operatorname{Re} z = x = \sqrt{3} - 1$
La parte immaginaria di z è	$\operatorname{Im} z = y = -\left(\sqrt{3} + 1\right)$
Il modulo di z è	$\lvert z \rvert = \rho = 2\sqrt{2}$
L'argomento di z è	$\arg z = \theta = -\frac{5\pi}{12}$

b) Dedurre dalla domanda precedente il coseno e il seno di $\frac{5\pi}{12}$ (non è richiesta la razionalizzazione dei denominatori).

Dato che l'argomento di z è $-\frac{5\pi}{12}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \cos\frac{5\pi}{12} &= \frac{\operatorname{Re} z}{\lvert z \rvert} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{5\pi}{12} &= -\frac{\operatorname{Im} z}{\lvert z \rvert} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

c) Scrivere in forma algebrica z^6.

Abbiamo $z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ e quindi

$$\begin{aligned} z^6 &= \left(2\sqrt{2}\right)^6 e^{-6i\frac{5\pi}{12}} = 2^6 2^3 e^{-i\frac{5\pi}{2}} \\ &= 64 \cdot 8e^{i\left(-2\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = 512e^{-i\frac{\pi}{2}} = -512i \end{aligned}$$

Quindi la parte reale di z^6 è 0 e la sua parte immaginaria -512.

Esercizio 5. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x; y; z) : 3x - y + 2z = 0\}$;

Possiamo riconoscere il piano ortogonale al vettore $(3; -1; 2)$, oppure osservare che se $(x; y; z) \in W_1$, allora $y = 3x + 2z$ e quindi $(x; y; z) = x(1; 3; 0) + z(0; 2; 1)$ e quindi si tratta del sottospazio generato dai vettori $(1; 3; 0)$ e $(0; 2; 1)$.

b) $V_2 = \mathbb{C}$ e $W_2 = \{z \in \mathbb{C} : (3 + 2i)z + (2 + 3i)\bar{z} = 0\}$;

Un primo modo di procedere e di scrivere $z = x + iy$ con x e $y \in \mathbb{R}$, allora $(3+2i)z + (2 + 3i)\bar{z} = (5x + y) + i(5x + y)$ per cui la condizione è equivalente a $5x + y = 0$ e si procede come nel caso delle coppie (x, y) tali che $5x + y = 0$.
Un altro modo di procedere è di osservare che $z = 0$ è una soluzione dell'equazione

quindi W_2 non è vuoto; se z_1 e $z_2 \in V_2$ allora $(3+2i)(z_1+z_2)+(2+3i)(\overline{z_1+z_2}) = (3+2i)z_1+(3+2i)z_2+(2+3i)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = (3+2i)z_1+(3+2i)z_2+(2+3i)\overline{z_1}+(2+3i)\overline{z_2} = 0+0 = 0$ quindi W_2 è chiuso per la somma; se $z \in V_2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $(3+2i)\lambda z+(2+3i)\overline{\lambda z} = (3+2i)\lambda z+(2+3i)\lambda\bar{z}$ perché $\lambda \in \mathbb{R}$ quindi $\bar{\lambda} = \lambda$ segue $(3+2i)\lambda z+(2+3i)\overline{\lambda z} = \lambda\big((3+2i)z+(2+3i)\bar{z}\big) = \lambda \cdot 0 = 0$; quindi W_2 è chiuso per il prodotto esterno; quindi W_2 è un sottospazio vettoriale

c) $V_3 = \mathbb{R}_3[x]$ e $W_3 = \big\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \in V_3 : \text{tutti gli } a_i \text{ sono interi}\big\}$;

Il polinomio x appartiene a W_3 ma invece $\frac{1}{2}x$ no, quindi W_3 non è uno spazio vettoriale.

d) Determinare i valori di k tali che $W_4 = \big\{f \in V_4 : f'(-1) = -k^2+2k-1\big\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_4 = \{\text{funzioni derivabili da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_4 deve contenere la funzione nulla. La derivata della funzione nulla è costante uguale a 0, quindi dobbiamo avere $-k^2+2k-1=0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k=1$ (soluzione doppia). In quel caso, il sottoinsieme W_4 diventa $W_4 = \{f \in V_4 : f'(-1) = 0\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla gli appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_4 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}(\lambda f+\mu g)'(-1) &= \lambda f'(-1)+\mu g'(-1)\\ &= \lambda \cdot 0+\mu \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,2,-1,0), \quad \underline{v}_2 = (0,3,4,0,-2), \quad \underline{v}_3 = (2,9,16,-2,-6).$$

a) Sono linearmente indipendenti?

I tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se

$$\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\lambda_3\underline{v}_3 = \underline{0} \quad \text{implica} \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

Poiché $\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\lambda_3\underline{v}_3 = (\lambda_1+2\lambda_3, 3\lambda_2+9\lambda_3, 2\lambda_1+4\lambda_2+16\lambda_3, -\lambda_1-\lambda_3, -2\lambda_2-6\lambda_3)$, abbiamo il sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_3=0\\ 3\lambda_2+9\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+4\lambda_2+16\lambda_3=0\\ -\lambda_1-2\lambda_3=0\\ -2\lambda_2-6\lambda_3=0\end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} \lambda_1+2\lambda_3=0\\ \lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi $\lambda_1 = -2\lambda_3$, $\lambda_2 = -3\lambda_3$, con λ_3 arbitrario. Poiché possiamo scegliere $\lambda_3 \neq 0$, i tre vettori sono linearmente dipendenti. In particolare, possiamo porre $\lambda_3 = 1$ ed ottenere $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, il che significa che $-2\underline{v}_1 - 3\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$ ossia $\underline{v}_3 = 2\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2$ (identità che si può verificare facilmente).

b) Individuare una base del sottospazio W generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Abbiamo visto che $\underline{v}_3$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$. Quindi $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$. Si verifica poi che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti: basta osservare che $\underline{v}_1$ non può essere un multiplo di $\underline{v}_2$, oppure considerare il sistema (1) con $\lambda_3 = 0$ e mostrare che l'unica soluzione è $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W.

c) Il vettore $\underline{w} = (2, 5, 0, 3, -2)$ appartiene a W?

Abbiamo visto che $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$. Quindi $\underline{w} \in W$ se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 = \underline{w}$, ossia tali che soddisfino il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ 3\lambda_2 = 5 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 3 \\ -2\lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Poiché è immediato vedere che tale sistema non ha soluzioni, il vettore $\underline{w}$ non appartiene al sottospazio W.

Esercizio 7. Si considerino i punti $A(1, -3, 1)$, $B(3, -2, 1)$, $C(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 4)$ e $D(0, -1, 4)$.

a) Dimostrare che sono complanari (ossia che appartengono tutti e quattro ad un piano).

Basta osservare che $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{DC} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ sono paralleli.

b) Scrivere l'equazione del piano che contiene i quattro punti.

Il vettore

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3, -6, 5)$$

è normale al piano cercato, che ha quindi equazione $3(x-1) - 6(y+3) + 5(z-1) = 0$, ossia $3x - 6y + 5z - 26 = 0$.

c) Dimostrare che i quattro punti sono i vertici di un trapezio rettangolo (con base maggiore AB).

Abbiamo già che visto che $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ sono paralleli. Basta quindi verificare che $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (-1, 2, 3)$ sono ortogonali, ossia che $(2, 1, 0) \cdot (-1, 2, 3) = 0$, il che è ovvio.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
28 aprile 2010 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezzo. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Determinare **le equazioni cartesiane** della retta s passante per il punto $P(1,2,5)$ e parallela alla retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 2x+z-6=0 \end{cases}$$

Possiamo ottenere le equazioni parametriche di r ponendo $z=t$ e ricavando dalle sue equazioni cartesiane $x=3-\frac{1}{2}t$ e $y=4+\frac{1}{2}t$. Quindi

$$r: \quad \begin{cases} x=3-\frac{1}{2}t \\ y=4+\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases}$$

e pertanto le equazioni parametriche della retta s sono

$$\begin{cases} x=1-\frac{1}{2}t \\ y=2+\frac{1}{2}t \\ z=5+t \end{cases}$$

Le sue equazioni cartesiane si trovano eliminando t; per esempio, ricavando $t=z-5$ dall'ultima equazione e sosituendo nelle prime due. Si arriva a

$$s: \quad \begin{cases} x+\frac{1}{2}z-\frac{7}{2}=0 \\ y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$$

Alternativamente si poteva osservare che, per ogni scelta di d_1 e d_2, la retta

$$\begin{cases} x-y+z+d_1=0 \\ 2x+z+d_2=0 \end{cases}$$

è parallela ad r. Imponendo il passaggio per $P(1,2,5)$ otteniamo $d_1 = -4$ e $d_2 = -7$, ossia le equazioni cartesiane di s

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + z - 7 = 0 \end{cases}$$

È facile verificare che queste equazioni sono equivalenti a quelle trovate in precedenza.

Esercizio 2. Dopo aver verificato che le rette

$$r: \quad \begin{cases} 5x + 2y - z - 12 = 0 \\ y + 3z - 9 = 0 \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

sono incidenti, determinare l'equazione del piano che le contiene entrambe.

Per verificare che le rette sono incidenti basta inserire le equazioni di s in quelle di r. Si ottiene infatti il sistema

$$\begin{cases} 5(2-t) + 2(1+t) - (2-t) - 12 = 0 \\ 1 + t + 3(2-t) - 9 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $t = -1$. Ciò significa che le due rette si intersecano nel punto $P(3,0,3)$.
Per determinare il piano π contenente r e s, si può considerare il fascio di piani contenente r, ossia $\lambda(5x + 2y - z - 12) + \mu(y + 3z - 9) = 0$, che ha $\underline{n} = (5\lambda, 2\lambda + \mu, -\lambda + 3\mu)$ come vettore normale. Affinché il piano contenga la retta s, il vettore $\underline{n}$ deve essere ortogonale al vettore direzionale di s, ossia a $\underline{v} = (-1,1,-1)$. La condizione è quindi $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$, che porta a $\mu = -\lambda$. Sostituendo nell'equazione del fascio si arriva all'equazione di π, che risulta essere $5x + y - 4z - 3 = 0$.
Verifica suggerita: sostituire le equazioni di s in quella di π e controllare che si ottiene un'identità.

Esercizio 3. a) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 - (4 - i)z + 5 + i = 0 \ .$$

Osservazione: calcolare 13^2

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (-4 + i)^2 - 4(5 + i) = 16 - 1 - 8i - 20 - 4i = -5 - 12i \ .$$

Possiamo calcolarne una radice quadrata, $\delta = x + iy$. Verificherà

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}\Delta = -5 \\ 2xy \qquad = \operatorname{Im}\Delta = -12 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \quad = 13 \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza si trova $2x^2 = 8$, cioè $x = \pm 2$. Nella seconda si vede che $y = \pm 3$ (con il segno opposto di x), quindi

$$\delta = 2 - 3i$$

(o il suo opposto). È allora facile vedere che le due soluzioni sono

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{4 - i + 2 - 3i}{2} = 3 - 2i \\ z_2 &= \frac{4 - i - 2 + 3i}{2} = 1 + i \end{aligned}$$

Si verifica che z_1 e z_2 sono <u>effettivamente</u> soluzioni dell'equazione.

b) Disegnare le soluzioni dell'equazione nel piano di Gauss.

c) Quali sono la somma e il prodotto delle soluzioni dell'equazione ?

In un'equazione del secondo grado

$$z^2 + bz + c = 0 \ ,$$

la somma delle soluzioni è $-b$ e il loro prodotto è c. Si può verificare facendo il calcolo.

Esercizio 4. Sia

$$z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} \ .$$

a) Determinare modulo, argomento, parte reale e parte immaginaria di z.

Il modulo di $z_1 = \sqrt{3} - i$ è

$$\rho_1 = \sqrt{3 + 1} = 2$$

mentre il modulo di $z_2 = 1 + i$ è

$$\rho_2 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \ .$$

Siccome z è il quoziente di z_1 e z_2, il modulo di z è

$$\rho = \sqrt{2}.$$

L'argomento di z_1 è l'angolo θ_1 tale che

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

quindi $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$ (a meno di un multiplo di 2π). Nello stesso modo l'argomento di z_2 è $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ (a meno di un multiplo di 2π). Quindi l'argomento di z è $\theta = \theta_1 - \theta_2 = -\frac{5\pi}{12}$ (a meno di un multiplo di 2π).

Calcolando il prodotto, vediamo che

$$z = \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)(1-i)}{1+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right) - i\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} .$$

Quindi

La parte reale di z è	$\operatorname{Re} z = x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
La parte immaginaria di z è	$\operatorname{Im} z = y = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
Il modulo di z è	$\lvert z\rvert = \rho = \sqrt{2}$
L'argomento di z è	$\arg z = \theta = -\frac{5\pi}{12}$

b) Dedurre dalla domanda precedente il coseno e il seno di $\frac{5\pi}{12}$ (non è richiesta la razionalizzazione dei denominatori).

Dato che l'argomento di z è $-\frac{5\pi}{12}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \cos\frac{5\pi}{12} &= \frac{\operatorname{Re} z}{\lvert z\rvert} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{5\pi}{12} &= -\frac{\operatorname{Im} z}{\lvert z\rvert} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

c) Scrivere in forma algebrica z^6.

Abbiamo $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ e quindi

$$\begin{aligned} z^6 &= \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{-6i\frac{5\pi}{12}} = 2^3 e^{-i\frac{5\pi}{2}} \\ &= 8e^{i\left(-2\pi-\frac{\pi}{2}\right)} = 8e^{-i\frac{\pi}{2}} = -8i \end{aligned}$$

Quindi la parte reale di z^6 è 0 e la sua parte immaginaria -8.

Esercizio 5. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. <u>Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.</u>

a) $V_1 = \mathbb{R}^4$ e $W_1 = \{(x;y;z;t) : x - 2y + 5z - t = 0\}$;

Si può riconoscere il sottospazio ortogonale al vettore $\underline{n} = (1;-2;5;-1)$.
In alternativa si può vedere che $(x;y;z;t) \in W_1$ se e solo se $t = x - 2y + 5z$ quindi se e solo se

$$\begin{aligned} (x;y;z;t) &= (x;y;z;x-2y+5z) = (x;0;0;x) + (0;y;0;-2y) + (0;0;z;5z) \\ &= x(1;0;0;1) + y(0;1;0;-2) + z(0;0;1;5) \end{aligned}$$

quindi $W_1 = \langle(1;0;0;1),(0;1;0;-2),(0;0;1;5)\rangle$.
In alternativa si poteva verificare le proprietà della definizione di sottospazio vettoriale: il vettore nullo, cioè $(0;0;0;0) \in W_1$ e W_1 è chiuso per la somma e il prodotto esterno.
In tutti i casi si conclude che W_1 è un sottospazio vettoriale.

b) $V_2 = \mathbb{C}$ e $W_2 = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \text{ è reale}\}$;

I complessi z tali che z^2 è reale sono i reali (il cui quadrato è maggiore o uguale a zero) e gli immaginari puri (il cui quadrato è minore o uguale a zero). In particolare $1 \in W_2$, $i \in W_2$ ma $1 + i \notin W_2$ quindi W_2 non è un sottospazio vettoriale di V_2.

c) $V_3 = \{\text{applicazioni da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$ e $W_3 = \{f \in V_3 : f(3) = -1\}$;

Il vettore nullo, cioè la funzione costante uguale a 0, non appartiene al sottoinsieme, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.

d) Determinare i valori di k tali che $W_4 = \{f \in V_4 : f'(2) = 2k^2 + 5k + 2\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_4 = \{\text{funzioni derivabili da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_4 deve contenere la funzione nulla. La derivata della funzione nulla è costante uguale a 0, quindi dobbiamo avere $2k^2+5k+2 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = -2$ e $k = -\frac{1}{2}$. In quel caso, il sottoinsieme W_4 diventa $W_4 = \{f \in V_4 : f'(2) = 0\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla gli appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_4 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)'(2) &= \lambda f'(2) + \mu g'(2) \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 2, -1, 0), \quad \underline{v}_2 = (0, 3, 1, 0, -2), \quad \underline{v}_3 = (2, 9, 7, -2, -6).$$

a) Sono linearmente indipendenti?

I tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \lambda_3\underline{v}_3 = \underline{0} \quad \text{implica} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Poiché $\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\lambda_3\underline{v}_3 = (\lambda_1+2\lambda_3, 3\lambda_2+9\lambda_3, 2\lambda_1+\lambda_2+7\lambda_3, -\lambda_1-\lambda_3, -2\lambda_2-6\lambda_3)$, abbiamo il sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi $\lambda_1 = -2\lambda_3$, $\lambda_2 = -3\lambda_3$, con λ_3 arbitrario. Poiché possiamo scegliere $\lambda_3 \neq 0$, i tre vettori sono linearmente dipendenti. In particolare, possiamo porre $\lambda_3 = 1$ ed ottenere $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, il che significa che $-2\underline{v}_1 - 3\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$ ossia $\underline{v}_3 = 2\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2$ (identità che si può verificare facilmente).

b) Individuare una base del sottospazio W generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Abbiamo visto che $\underline{v}_3$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$. Quindi $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$. Si verifica poi che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti: basta osservare che $\underline{v}_1$ non può essere un multiplo di $\underline{v}_2$, oppure considerare il sistema (1) con $\lambda_3 = 0$ e mostrare che l'unica soluzione è $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W.

c) Il vettore $\underline{w} = (2, 5, 0, 3, -2)$ appartiene a W?

Abbiamo visto che $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$. Quindi $\underline{w} \in W$ se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \underline{w}$, ossia tali che soddisfino il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ 3\lambda_2 = 5 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 3 \\ -2\lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Poiché è immediato vedere che tale sistema non ha soluzioni, il vettore $\underline{w}$ non appartiene al sottospazio W.

Esercizio 7. Si considerino i punti $A(1, -6, 1)$, $B(3, -5, 1)$, $C(\frac{2}{3}, -\frac{11}{3}, 4)$ e $D(0, -4, 4)$.

a) Dimostrare che sono complanari (ossia che appartengono tutti e quattro ad un piano).

Basta osservare che $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{DC} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ sono paralleli.

b) Scrivere l'equazione del piano che contiene i quattro punti.

Il vettore

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3, -6, 5)$$

è normale al piano cercato, che ha quindi equazione $3(x-1) - 6(y+6) + 5(z-1) = 0$, ossia $3x - 6y + 5z - 44 = 0$.

c) Dimostrare che i quattro punti sono i vertici di un trapezio rettangolo (con base maggiore AB).

Abbiamo già che visto che $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ sono paralleli. Basta quindi verificare che $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (-1, 2, 3)$ sono ortogonali, ossia che $(2, 1, 0) \cdot (-1, 2, 3) = 0$, il che è ovvio.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
28 aprile 2010 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezzo. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Determinare **le equazioni cartesiane** della retta s passante per il punto $P(3, 2, 5)$ e parallela alla retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{cases}$$

Possiamo ottenere le equazioni parametriche di r ponendo $z = t$ e ricavando dalle sue equazioni cartesiane $x = 3 - \frac{1}{2}t$ e $y = 4 + \frac{3}{2}t$. Quindi

$$r: \quad \begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2}t \\ y = 4 + \frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

e pertanto le equazioni parametriche della retta s sono

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2}t \\ y = 2 + \frac{3}{2}t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

Le sue equazioni cartesiane si trovano eliminando t; per esempio, ricavando $t = z - 5$ dall'ultima equazione e sosituendo nelle prime due. Si arriva a

$$s: \quad \begin{cases} x + \frac{1}{2}z - \frac{11}{2} = 0 \\ y - \frac{3}{2}z + \frac{11}{2} = 0 \end{cases}$$

Alternativamente si poteva osservare che, per ogni scelta di d_1 e d_2, la retta

$$\begin{cases} x - y + 2z + d_1 = 0 \\ 2x + z + d_2 = 0 \end{cases}$$

è parallela ad r. Imponendo il passaggio per $P(3, 2, 5)$ otteniamo $d_1 = -11$ e $d_2 = -11$, ossia le equazioni cartesiane di s

$$\begin{cases} x - y + 2z - 11 = 0 \\ 2x + z - 11 = 0 \end{cases}$$

È facile verificare che queste equazioni sono equivalenti a quelle trovate in precedenza.

Esercizio 2. Dopo aver verificato che le rette

$$r: \quad \begin{cases} 5x + 3y - z - 12 = 0 \\ y + 3z - 9 = 0 \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

sono incidenti, determinare l'equazione del piano che le contiene entrambe.

Per verificare che le rette sono incidenti basta inserire le equazioni di s in quelle di r. Si ottiene infatti il sistema

$$\begin{cases} 5(1 - 2t) + 3(1 + t) - (1 - 2t) - 12 = 0 \\ 1 + t + 3(1 - 2t) - 9 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $t = -1$. Ciò significa che le due rette si intersecano nel punto $P(3, 0, 3)$.
Per determinare il piano π contenente r e s, si può considerare il fascio di piani contenente r, ossia $\lambda(5x + 3y - z - 12) + \mu(y + 3z - 9) = 0$, che ha $\underline{n} = (5\lambda, 3\lambda + \mu, -\lambda + 3\mu)$ come vettore normale. Affinché il piano contenga la retta s, il vettore $\underline{n}$ deve essere ortogonale al vettore direzionale di s, ossia a $\underline{v} = (-2, 1, -2)$. La condizione è quindi $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$, che porta a $\mu = -\lambda$. Sostituendo nell'equazione del fascio si arriva all'equazione di π, che risulta essere $5x + 2y - 4z - 3 = 0$.
Verifica suggerita: sostituire le equazioni di s in quella di π e controllare che si ottiene un'identità.

Esercizio 3. a) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 - (4 - 3i)z + 1 - 5i = 0 \ .$$

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (-4 + 3i)^2 - 4(1 - 5i) = 16 - 9 - 24i - 4 + 20i = 3 - 4i \ .$$

Possiamo calcolarne una radice quadrata, $\delta = x + iy$. Verificherà

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}\Delta = \ \ 3 \\ 2xy \qquad\ = \operatorname{Im}\Delta = -4 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \quad = \ \ 5 \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza si trova $2x^2 = 8$, cioè $x = \pm 2$. Nella seconda si vede che $y = \pm 1$ (con il segno opposto di x), quindi

$$\delta = 2 - i$$

(o il suo opposto). È allora facile vedere che le due soluzioni sono

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{4 - 3i + 2 - i}{2} = 3 - 2i \\ z_2 &= \frac{4 - 3i - 2 - i}{2} = 1 - i \end{aligned}$$

Si verifica che z_1 e z_2 sono <u>effettivamente</u> soluzioni dell'equazione.

b) Disegnare le soluzioni dell'equazione nel piano di Gauss.

c) Quali sono la somma e il prodotto delle soluzioni dell'equazione ?

In un'equazione del secondo grado

$$z^2 + bz + c = 0 \ ,$$

la somma delle soluzioni è $-b$ e il loro prodotto è c. Si può verificare facendo il calcolo.

Esercizio 4. Sia

$$z = \left(\sqrt{3} + i\right)(1 + i) \ .$$

a) Determinare modulo, argomento, parte reale e parte immaginaria di z.

Il modulo di $z_1 = \sqrt{3} + i$ è

$$\rho_1 = \sqrt{3 + 1} = 2$$

mentre il modulo di $z_2 = 1 + i$ è

$$\rho_2 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \ .$$

Siccome z è il prodotto di z_1 e z_2, il modulo di z è

$$\rho = 2\sqrt{2}.$$

L'argomento di z_1 è l'angolo θ_1 tale che

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

quindi $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ (a meno di un multiplo di 2π). Nello stesso modo l'argomento di z_2 è $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ (a meno di un multiplo di 2π). Quindi l'argomento di z è $\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{5\pi}{12}$ (a meno di un multiplo di 2π).

Calcolando il prodotto, vediamo che

$$z = \sqrt{3} - 1 + i\left(\sqrt{3} + 1\right) \ .$$

Quindi

La parte reale di z è	$\operatorname{Re} z = x = \sqrt{3} - 1$
La parte immaginaria di z è	$\operatorname{Im} z = y = \sqrt{3} + 1$
Il modulo di z è	$\lvert z\rvert = \rho = 2\sqrt{2}$
L'argomento di z è	$\arg z = \theta = \frac{5\pi}{12}$

b) Dedurre dalla domanda precedente il coseno e il seno di $\frac{5\pi}{12}$ (non è richiesta la razionalizzazione dei denominatori).

Dato che l'argomento di z è $\frac{5\pi}{12}$, abbiamo

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

c) Scrivere in forma algebrica z^6.

Abbiamo $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ e quindi

$$\begin{aligned} z^6 &= \left(2\sqrt{2}\right)^6 e^{6i\frac{5\pi}{12}} = 2^6 2^3 e^{i\frac{5\pi}{2}} \\ &= 64 \cdot 8e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = 512e^{i\frac{\pi}{2}} = 512i \end{aligned}$$

Quindi la parte reale di z^6 è 0 e la sua parte immaginaria 512.

Esercizio 5. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(2x + y; 3x - 2y; y + 2) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

Siccome Il vettore nullo non è ottenuto non appartiene a W_1, infatti i valori di x e y necessari per ottenerlo sarebbero $y = -2$ (nella terza componente) e $x = -3$ (nella seconda) ma a questo punto si ottiene -8 nella prima. Quindi W_1 non è un sottospazio vettoriale di V_1.

b) $V_2 = \mathbb{C}$ e $W_2 = \{z \in \mathbb{C} : (3 - i)z + (2 + 4i)\bar{z} = 0\}$;

Un primo modo di procedere è di scrivere $z = x+iy$ con x e $y \in \mathbb{R}$, allora $(2-i)z+(1+2i)\bar{z} = (5x+5y)+i(3x+y)$ per cui la condizione è equivalente a $5x+5y = 3x+y = 0$ e quindi $x = y = 0$. Quindi $W_2 = \{0\}$ è un sottospazio vettoriale di V_2.

Un altro modo di procedere è di osservare che $z = 0$ è una soluzione dell'equazione quindi W_2 non è vuoto; se z_1 e $z_2 \in V_2$ allora $(3-i)(z_1+z_2) + (2+4i)(\overline{z_1+z_2}) = (3-i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = (3-i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)\overline{z_1} + (2+4i)\overline{z_2} = 0 + 0 = 0$ quindi W_2 è chiuso per la somma; se $z \in V_2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $(3-i)\lambda z + (2+4i)\overline{\lambda z} = (3-i)\lambda z + (2+4i)\lambda\bar{z}$ perché $\lambda \in \mathbb{R}$ quindi $\bar{\lambda} = \lambda$ segue $(3-i)\lambda z + (2+4i)\overline{\lambda z} = \lambda\big((3-i)z + (2+4i)\bar{z}\big) = \lambda \cdot 0 = 0$; quindi W_2 è chiuso per il prodotto esterno; quindi W_2 è un sottospazio vettoriale (in questo modo non ci siamo accorti che W_2 era uno spazio molto piccolo).

c) $V_3 = \mathbb{R}[x]$ e $W_3 = \{P \in V_3 : P(1)P(-1) = 0\}$;

Il polinomio $P(x) = x + 1$ e il polinomio $Q(x) = x - 1$ sono due elementi di W_3. La loro somma $P(x)+Q(x) = 2x$ invece non appartiene a W_3 quindi non è un sottospazio vettoriale.

d) Determinare i valori di k tali che $W_4 = \big\{f \in V_4 : f'(1) = k^2 + 2k + 1\big\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_4 = \{\text{funzioni derivabili da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_4 deve contenere la funzione nulla. La derivata della funzione nulla è costante uguale a 0, quindi dobbiamo avere $k^2 + 2k + 1 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = -1$ (soluzione doppia). In quel caso, il sottoinsieme W_4 diventa $W_4 = \{f \in V_4 : f'(1) = 0\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla gli appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_4 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)'(1) &= \lambda f'(1) + \mu g'(1)\\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 2, -1, 0), \quad \underline{v}_2 = (0, 3, -2, 0, -2), \quad \underline{v}_3 = (2, 9, -2, -2, -6).$$

a) Sono linearmente indipendenti?

I tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \lambda_3\underline{v}_3 = \underline{0} \quad \text{implica} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Poiché $\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\lambda_3\underline{v}_3 = (\lambda_1+2\lambda_3, 3\lambda_2+9\lambda_3, 2\lambda_1-2\lambda_2-2\lambda_3, -\lambda_1-\lambda_3, -2\lambda_2-6\lambda_3)$, abbiamo il sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0\\ 3\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0\\ -\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0\\ -2\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi $\lambda_1 = -2\lambda_3$, $\lambda_2 = -3\lambda_3$, con λ_3 arbitrario. Poiché possiamo scegliere $\lambda_3 \neq 0$, i tre vettori sono linearmente dipendenti. In particolare, possiamo porre $\lambda_3 = 1$ ed ottenere $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, il che significa che $-2\underline{v}_1 - 3\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$ ossia $\underline{v}_3 = 2\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2$ (identità che si può verificare facilmente).

b) Individuare una base del sottospazio W generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Abbiamo visto che $\underline{v}_3$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$. Quindi $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$. Si verifica poi che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti: basta osservare che $\underline{v}_1$ non può essere un multiplo di $\underline{v}_2$, oppure considerare il sistema (1) con $\lambda_3 = 0$ e mostrare che l'unica soluzione è $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W.

c) Il vettore $\underline{w} = (2, 5, 0, 3, -2)$ appartiene a W?

Abbiamo visto che $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$. Quindi $\underline{w} \in W$ se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 = \underline{w}$, ossia tali che soddisfino il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ 3\lambda_2 = 5 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 3 \\ -2\lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Poiché è immediato vedere che tale sistema non ha soluzioni, il vettore $\underline{w}$ non appartiene al sottospazio W.

Esercizio 7. Si considerino i punti $A(1, -4, 1)$, $B(3, -3, 1)$, $C(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 4)$ e $D(0, -2, 4)$.

a) Dimostrare che sono complanari (ossia che appartengono tutti e quattro ad un piano).

Basta osservare che $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{DC} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ sono paralleli.

b) Scrivere l'equazione del piano che contiene i quattro punti.

Il vettore

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3, -6, 5)$$

è normale al piano cercato, che ha quindi equazione $3(x-1) - 6(y+4) + 5(z-1) = 0$, ossia $3x - 6y + 5z - 32 = 0$.

c) Dimostrare che i quattro punti sono i vertici di un trapezio rettangolo (con base maggiore AB).

Abbiamo già che visto che $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ sono paralleli. Basta quindi verificare che $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (-1, 2, 3)$ sono ortogonali, ossia che $(2, 1, 0) \cdot (-1, 2, 3) = 0$, il che è ovvio.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
28 aprile 2010 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezzo. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Determinare **le equazioni cartesiane** della retta s passante per il punto $P(5, 2, 5)$ e parallela alla retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{cases}$$

Possiamo ottenere le equazioni parametriche di r ponendo $z = t$ e ricavando dalle sue equazioni cartesiane $x = 3 - \frac{1}{2}t$ e $y = 4 + \frac{5}{2}t$. Quindi

$$r: \quad \begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2}t \\ y = 4 + \frac{5}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

e pertanto le equazioni parametriche della retta s sono

$$\begin{cases} x = 5 - \frac{1}{2}t \\ y = 2 + \frac{5}{2}t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

Le sue equazioni cartesiane si trovano eliminando t; per esempio, ricavando $t = z - 5$ dall'ultima equazione e sosituendo nelle prime due. Si arriva a

$$s: \quad \begin{cases} x + \frac{1}{2}z - \frac{15}{2} = 0 \\ y - \frac{5}{2}z + \frac{21}{2} = 0 \end{cases}$$

Alternativamente si poteva osservare che, per ogni scelta di d_1 e d_2, la retta

$$\begin{cases} x - y + 3z + d_1 = 0 \\ 2x + z + d_2 = 0 \end{cases}$$

è parallela ad r. Imponendo il passaggio per $P(5,2,5)$ otteniamo $d_1 = -18$ e $d_2 = -15$, ossia le equazioni cartesiane di s

$$\begin{cases} x - y + 3z - 18 = 0 \\ 2x + z - 15 = 0 \end{cases}$$

È facile verificare che queste equazioni sono equivalenti a quelle trovate in precedenza.

Esercizio 2. Dopo aver verificato che le rette

$$r: \quad \begin{cases} 5x - 2y - z - 12 = 0 \\ y + 3z - 9 = 0 \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$$

sono incidenti, determinare l'equazione del piano che le contiene entrambe.

Per verificare che le rette sono incidenti basta inserire le equazioni di s in quelle di r. Si ottiene infatti il sistema

$$\begin{cases} 5(6 + 3t) - 2(1 + t) - (6 + 3t) - 12 = 0 \\ 1 + t + 3(6 + 3t) - 9 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $t = -1$. Ciò significa che le due rette si intersecano nel punto $P(3,0,3)$.
Per determinare il piano π contenente r e s, si può considerare il fascio di piani contenente r, ossia $\lambda(5x - 2y - z - 12) + \mu(y + 3z - 9) = 0$, che ha $\underline{n} = (5\lambda, -2\lambda + \mu, -\lambda + 3\mu)$ come vettore normale. Affinché il piano contenga la retta s, il vettore $\underline{n}$ deve essere ortogonale al vettore direzionale di s, ossia a $\underline{v} = (3,1,3)$. La condizione è quindi $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$, che porta a $\mu = -\lambda$. Sostituendo nell'equazione del fascio si arriva all'equazione di π, che risulta essere $5x - 3y - 4z - 3 = 0$.
Verifica suggerita: sostituire le equazioni di s in quella di π e controllare che si ottiene un'identità.

Esercizio 3. a) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0 \ .$$

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (4 + 3i)^2 - 4(1 + 5i) = 16 - 9 + 24i - 4 - 20i = 3 + 4i \ .$$

Possiamo calcolarne una radice quadrata, $\delta = x + iy$. Verificherà

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}\Delta = 3 \\ 2xy \qquad = \operatorname{Im}\Delta = 4 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \quad = 5 \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza si trova $2x^2 = 8$, cioè $x = \pm 2$. Nella seconda si vede che $y = \pm 1$ (con lo stesso segno di x), quindi

$$\delta = 2 + i$$

(o il suo opposto). È allora facile vedere che le due soluzioni sono

$$z_1 = \frac{4 + 3i + 2 + i}{2} = 3 + 2i$$
$$z_2 = \frac{4 + 3i - 2 - i}{2} = 1 + i$$

Si verifica che z_1 e z_2 sono <u>effettivamente</u> soluzioni dell'equazione.

b) Disegnare le soluzioni dell'equazione nel piano di Gauss.

c) Quali sono la somma e il prodotto delle soluzioni dell'equazione ?

In un'equazione del secondo grado

$$z^2 + bz + c = 0 \ ,$$

la somma delle soluzioni è $-b$ e il loro prodotto è c. Si può verificare facendo il calcolo.

Esercizio 4. Sia

$$z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \ .$$

a) Determinare modulo, argomento, parte reale e parte immaginaria di z.

Il modulo di $z_1 = \sqrt{3} + i$ è

$$\rho_1 = \sqrt{3 + 1} = 2$$

mentre il modulo di $z_2 = 1 - i$ è

$$\rho_2 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \ .$$

Siccome z è il quoziente di z_1 e z_2, il modulo di z è

$$\rho = \sqrt{2}.$$

L'argomento di z_1 è l'angolo θ_1 tale che

$$\cos\theta_1 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\theta_1 = \tfrac{1}{2}$$

quindi $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ (a meno di un multiplo di 2π). Nello stesso modo l'argomento di z_2 è $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$ (a meno di un multiplo di 2π). Quindi l'argomento di z è $\theta = \theta_1 - \theta_2 = \frac{5\pi}{12}$ (a meno di un multiplo di 2π).

Calcolando il prodotto, vediamo che

$$z = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)(1+i)}{1+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}.$$

Quindi

La parte reale di z è	$\operatorname{Re} z = x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
La parte immaginaria di z è	$\operatorname{Im} z = y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
Il modulo di z è	$\lvert z\rvert = \rho = \sqrt{2}$
L'argomento di z è	$\arg z = \theta = \frac{5\pi}{12}$

b) Dedurre dalla domanda precedente il coseno e il seno di $\frac{5\pi}{12}$ (non è richiesta la razionalizzazione dei denominatori).

Dato che l'argomento di z è $\frac{5\pi}{12}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \cos\frac{5\pi}{12} &= \frac{\operatorname{Re} z}{\lvert z\rvert} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{5\pi}{12} &= \frac{\operatorname{Im} z}{\lvert z\rvert} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

c) Scrivere in forma algebrica z^6.

Abbiamo $z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ e quindi

$$\begin{aligned} z^6 &= \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{6i\frac{5\pi}{12}} = 2^3 e^{i\frac{5\pi}{2}} \\ &= 8e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i \end{aligned}$$

Quindi la parte reale di z^6 è 0 e la sua parte immaginaria 8.

Esercizio 5. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x+3y; 5xy; 2x-y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

I vettori $(1;0;2)$ ($x=1$, $y=0$) e $(3;0;-1)$ ($x=0$, $y=1$) appartengono a W_1, però la loro somma $\underline{v} = (4;0;1)$ non ci appartiene. Infatti per appartenere al questo insieme dovrebbe essere della forma $\underline{v} = (x+3y; 5xy; 2x-y)$, quindi o $x=0$ o $y=0$. Se $x=0$, dobbiamo avere $y=-1$ (per la terza componente), ma la prima sarebbe -3; se invece $y=0$, dobbiamo avere $x=4$ (per la prima componente), ma la terza sarebbe 8. Quindi non è un sottospazio vettoriale.

b) $V_2 = \mathbb{C}$ e $W_2 = \{z \in \mathbb{C} : (3+2i)z + (2+3i)\bar{z} = 1\}$;

Il vettore nullo, cioè il numero complesso 0 non appartiene a W_2 quindi W_2 non è un sottospazio vettoriale.

c) $V_3 = \mathbb{R}[x]$ e $W_3 = \{P \in V_3 : P(x) = xP'(x)\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, appartiene a W_3, quindi non è vuoto. Se P e Q sono due polinomi di W_3 e λ e μ sono due reali allora $(\lambda P+\mu Q)(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) = \lambda x P'(x) + \mu x Q'(x) = x(\lambda P'(x) + \mu Q'(x))$ e quindi $\lambda P + \mu Q \in W_3$. Quindi W_3 è un sottospazio vettoriale. (Si può verificare senza troppe difficoltà che W_3 è costituito dai polinomi ax con $a \in \mathbb{R}$)

d) Determinare i valori di k tali che $W_4 = \left\{f \in V_4 : f'(-2) = -2k^2 + 5k - 2\right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_4 = \{$funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_4 deve contenere la funzione nulla. La derivata della funzione nulla è costante uguale a 0, quindi dobbiamo avere $-2k^2 + 5k - 2 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = 2$ e $k = \frac{1}{2}$. In quel caso, il sottoinsieme W_4 diventa $W_4 = \{f \in V_4 : f'(-2) = 0\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla gli appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_4 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)'(-2) &= \lambda f'(-2) + \mu g'(-2)\\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 2, -1, 0), \quad \underline{v}_2 = (0, 3, 3, 0, -2), \quad \underline{v}_3 = (2, 9, 13, -2, -6).$$

a) Sono linearmente indipendenti?

I tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \lambda_3\underline{v}_3 = \underline{0} \quad \text{implica} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Poiché $\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\lambda_3\underline{v}_3 = (\lambda_1+2\lambda_3, 3\lambda_2+9\lambda_3, 2\lambda_1+3\lambda_2+13\lambda_3, -\lambda_1-\lambda_3, -2\lambda_2-6\lambda_3)$, abbiamo il sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 13\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi $\lambda_1 = -2\lambda_3$, $\lambda_2 = -3\lambda_3$, con λ_3 arbitrario. Poiché possiamo scegliere $\lambda_3 \neq 0$, i tre vettori sono linearmente dipendenti. In particolare, possiamo porre $\lambda_3 = 1$ ed ottenere $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, il che significa che $-2\underline{v}_1 - 3\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$ ossia $\underline{v}_3 = 2\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2$ (identità che si può verificare facilmente).

b) Individuare una base del sottospazio W generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Abbiamo visto che $\underline{v}_3$ è una combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$. Quindi $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$. Si verifica poi che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti: basta osservare che $\underline{v}_1$ non può essere un multiplo di $\underline{v}_2$, oppure considerare il sistema (1) con $\lambda_3 = 0$ e mostrare che l'unica soluzione è $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W.

c) Il vettore $\underline{w} = (2, 5, 0, 3, -2)$ appartiene a W?

Abbiamo visto che $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$. Quindi $\underline{w} \in W$ se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \underline{w}$, ossia tali che soddisfino il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ 3\lambda_2 = 5 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 3 \\ -2\lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Poiché è immediato vedere che tale sistema non ha soluzioni, il vettore $\underline{w}$ non appartiene al sottospazio W.

Esercizio 7. Si considerino i punti $A(1, -1, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 4)$ e $D(0, 1, 4)$.

a) Dimostrare che sono complanari (ossia che appartengono tutti e quattro ad un piano).

Basta osservare che $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{DC} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ sono paralleli.

b) Scrivere l'equazione del piano che contiene i quattro punti.

Il vettore

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3, -6, 5)$$

è normale al piano cercato, che ha quindi equazione $3(x-1) - 6(y+1) + 5(z-1) = 0$, ossia $3x - 6y + 5z - 14 = 0$.

c) Dimostrare che i quattro punti sono i vertici di un trapezio rettangolo (con base maggiore AB).

Abbiamo già che visto che $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ sono paralleli. Basta quindi verificare che $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (-1, 2, 3)$ sono ortogonali, ossia che $(2, 1, 0) \cdot (-1, 2, 3) = 0$, il che è ovvio.