Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
18 febbraio 2010 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia

$$z = \frac{3 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} - 1 \; .$$

a) Calcolare la parte reale, la parte immaginaria, il modulo e l'argomento di z.

Abbiamo

$$\begin{aligned} z &= \frac{(3 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} - 1 = \frac{3 + 3i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - i^2\left(\sqrt{3}\right)^2}{1+3} - 1 \\ &= \frac{3 + 3 + 2i\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} - 1 \\ &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Si deve verificare (sulla brutta copia) che $(1 - i\sqrt{3})z$ dà lo stesso risultato usando l'espressione del testo e la soluzione trovata.

Quindi la parte reale di z è $\frac{1}{2}$, la parte immaginaria è $\frac{\sqrt{3}}{2}$, il quadrato del suo modulo è $|z|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ e quindi il suo modulo è $|z| = 1$.

L'argomento di z sarà l'angolo θ tra $-\pi$ e π tale che $\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ e $\sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cioè $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b) Calcolare z^4 in forma algebrica.

Poiché abbiamo il modulo e l'argomento di z, è facile calcolare la sua potenza quarta: avrà modulo $1^4 = 1$ e argomento $4\frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$. Quindi $z^4 = -z$ (cosicché la forma algebrica di z^4 si deduce immediatamente da quella di z).

Esercizio 2. Dopo aver verificato che le rette

$$r: \begin{cases} 3x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ -y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} -3x + 3y + z + 3 = 0 \\ 3x + 4y - 8z + 4 = 0 \end{cases}$$

sono parallele, determinare l'equazione di un piano che le contiene entrambe.

Per verificare che le rette sono parallele, basta calcolare un vettore direttore di ciascuna. Lo otteniamo come prodotto vettoriale dei vettori normali ai piani che definisono le rette:

$$\begin{aligned} \underline{v}_r &= (3; -2; -2) \wedge (0; -1; 1) = (-2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1); 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 3; 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0) \\ &= (-4; -3; -3) = -(4; 3; 3) \\ \underline{v}_s &= (-3; 3; 1) \wedge (3; 4; -8) = (3 \cdot (-8) - 1 \cdot 4; 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-8); -3 \cdot 4 - 3 \cdot 3) \\ &= (-28; -21; -21) = -7(4; 3; 3) \end{aligned}$$

Le rette sono quindi parallele perché dirette dallo stesso vettore $\underline{v} = (4; 3; 3)$.
Attenzione: $\underline{v}_r = -\underline{v} \neq \underline{v}$ e $\underline{v}_s = -7\underline{v} \neq \underline{v}$. I tre vettori $\underline{v}$, $\underline{v}_r$ e $\underline{v}_s$ sono paralleli ma distinti.
Osserviamo che le due rette sono parallele quindi sono contenute in uno stesso piano. Tale piano è unico se e solo se le due rette sono distinte (se sono uguali c'è un fascio di piani che le contengono).
Per trovare tale piano possiamo usare il fascio di piani passante per r e imporre il passaggio per un punto di s.
Procediamo in un modo diverso. Cerchiamo un punto in ciascuna delle due rette. Ponendo $y = 0$ nell'equazione di r si trova $z = 2$ e quindi $x = 1$. Quindi il punto $A(1; 0; 2)$ appartiene ad r. Sommando le due equazioni nel sistema che definisce s si trova $7y - 7z + 7 = 0$, cioè $y = z - 1$. Quindi con $z = 0$ abbiamo $y = -1$ e quindi $-3x = 0$, cioè $x = 0$. Quindi $B(0; -1; 0)$ appartiene alla retta s **(Inserire le coordinate di A nel sistema che definisce r e le coordinate di B nel sistema che definisce s per verificare i conti)**. Il piano cercato dovrà contenere i punti A, B ed essere parallelo al vettore $\underline{v}$. Sia $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$. Il piano avrà normale

$$\begin{aligned} \underline{n} = \underline{u} \wedge \underline{v} &= (-1; -1; -2) \wedge (4; 3; 3) = (-1 \cdot 3 + 2 \cdot 3; -2 \cdot 4 + 1 \cdot 3; -1 \cdot 3 + 1 \cdot 4) \\ &= (3; -5; 1) \end{aligned}$$

Siccome il prodotto vettoriale è diverso dal vettore nullo, il piano che contiene le due rette è unico. Tale piano avrà quindi un'equazione della forma

$$3x - 5(y + 1) + z = 0$$

cioè

$$3x - 5y + z - 5 = 0 \ .$$

<u>È buona norma verificare (in brutta copia) che questa equazione si può ottenere come combinazione sia delle due che definiscono r che delle due che definiscono s.</u>

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 12 \\ 18 & -7 & -36 \\ -6 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

Determinare gli autovalori e autovettori di M.

Per determinare gli autovalori di M, calcoliamo il suo polinomio caratteristico. Si tratta del polinomio $P(\lambda)$ tale che

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 & -12 \\ -18 & \lambda+7 & 36 \\ 6 & -3 & \lambda-14 \end{vmatrix}$$

sottraendo la terza riga alla prima

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ -18 & \lambda+7 & 36 \\ 6 & -3 & \lambda-14 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -18 & \lambda+7 & 36 \\ 6 & -3 & \lambda-14 \end{vmatrix}$$

aggiungendo la prima colonna alla terza

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -18 & \lambda+7 & 18 \\ 6 & -3 & \lambda-8 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda+7 & 18 \\ -3 & \lambda-8 \end{vmatrix}$$

aggiungendo due volte la seconda riga alla prima

$$\begin{aligned} &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2\lambda+2 \\ -3 & \lambda-8 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & \lambda-8 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-8+6) = (\lambda-2)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

Gli autovalori di M sono gli zeri di $P(\lambda)$, cioè $\lambda = 2$ (doppio) e $\lambda = -1$ (semplice).
Sappiamo già che l'autovalore $\lambda = -1$ è regolare perché è semplice, quindi la matrice M sarà diagonalizzabile se e solo se l'autovalore $\lambda = 2$ è regolare, cioè se e solo se l'autospazio corrispondente è di dimensione 2.
Calcoliamo ora gli autovettori di M:

- $\lambda = -1$. Abbiamo

$$M - \lambda I_3 = M + I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 18 & -6 & -36 \\ -6 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Gli autovettori per l'autovalore $\lambda = -1$ saranno le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} -3x + 3y + 12z = 0 \\ 18x - 6y - 36z = 0 \\ -6x + 3y + 15z = 0 \end{cases}$$

Possiamo dividere le equazioni rispettivamente per -3, 6 e -3 e otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ 3x - y - 6z = 0 \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

Sottraiamo la prima equazione alle altre due e otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ 2x \qquad - 2z = 0 \\ x \qquad\ - z = 0 \end{cases}$$

in cui la seconda equazione è ovviamente equivalente alla terza. Otteniamo $z = -x$ e $y = 5x$. Quindi gli autovettori sono i multipli non nulli del vettore $\underline{v}_{-1} = (1; -3; 1)$.

- $\lambda = 2$. Nello stesso modo

$$M - \lambda I_3 = M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 12 \\ 18 & -9 & -36 \\ -6 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Gli autovettori per l'autovalore $\lambda = 2$ saranno le soluzioni non nulle del sistema (dove abbiamo diviso le equazioni rispettivamente per -3, 9 e -3)

$$\begin{cases} 2x - y - 4z = 0 \\ 2x - y - 4z = 0 \\ 2x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

Le tre equazioni sono le stesse, l'autospazio per l'autovalore 2 è il piano di equazione $2x - y - 4z = 0$. Una base dell'autospazio è data dai vettori $\underline{v}_2 = (1; 2; 0)$ e $\underline{v}'_2 = (0; -4; 1)$. Gli autovettori sono le combinazioni lineari non nulle di questi vettori, cioè gli $(x; 2x - 4z; z)$ con $(x, z) \neq (0, 0)$.

Si deve verificare (in brutta copia) che $M\underline{v}_{-1} = -\underline{v}_{-1}$, $M\underline{v}_2 = 2\underline{v}_2$ e $M\underline{v}'_2 = 2\underline{v}'_2$.

Stabilire se la matrice M è diagonalizzabile.

La matrice è diagonalizzabile perché tutti i suoi autovalori sono regolari.

Esercizio 4. Sia $f_\lambda : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + (4 - \lambda^2) \\ b - 2d \\ (\lambda + 2)cd - a \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori di λ l'applicazione f_λ è lineare.

Sappiamo che un'applicazione lineare manda il vettore nullo sul vettore nullo. Se f_λ è lineare, abbiamo necessariamente

$$f_\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$$f_\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi una condizione necessaria per avere f_λ lineare è che $4-\lambda^2=0$, cioè $\lambda=\pm 2$.
Per $\lambda = 2$, abbiamo

$$f_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ b-2d \\ 4cd-a \end{pmatrix} .$$

Osserviamo un problema nel termine « non lineare » cd. Infatti

$$f_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mentre

$$\begin{aligned} f_2\left(2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) &= f_2 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 f_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi f_2 non è lineare.
Per $\lambda = -2$ abbiamo

$$f_{-2} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ b-2d \\ -a \end{pmatrix} .$$

Allora siano $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ e $M' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono

$$
\begin{aligned}
f_{-2}(M+M') &= f_{-2}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = f_{-2}\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(a+a') \\ b+b'-2(d+d') \\ -(a+a') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2a' \\ b+b'-2d+2d' \\ -a-a' \end{pmatrix} \\
f_{-2}(M) &= \begin{pmatrix} 2a \\ b-2d \\ -a \end{pmatrix} \\
f_{-2}(M') &= \begin{pmatrix} 2a' \\ b'-2d' \\ -a' \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

quindi

$$
\begin{aligned}
f_{-2}(M) + f_{-2}(M') &= \begin{pmatrix} 2a \\ b-2d \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a' \\ b'-2d' \\ -a' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2a+2a' \\ b+b'-2d+2d' \\ -a-a' \end{pmatrix} = f_{-2}(M+M')
\end{aligned}
$$

In modo analogo,

$$
\begin{aligned}
f_{-2}(\alpha M) &= f_{-2}\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha a \\ \alpha b - 2\alpha d \\ -\alpha a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha 2a \\ \alpha(b-2d) \\ \alpha(-a) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} 2a \\ b-2d \\ -a \end{pmatrix} = \alpha f_{-2}(M)
\end{aligned}
$$

Quindi f_{-2} è lineare.

Per tale (o tali) λ determinare il nucleo di f_λ.

Il nucleo di f_{-2} è l'insieme dei vettori di $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tali che $f_{-2}(M) = \underline{0}$. Dall'espressione di f_{-2} sono tutte le matrici $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ tali che $2a = 0$, $b - 2d = 0$ e $a = 0$, cioè le matrici $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2d \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$; in particolare si tratta di un sottospazio vettoriale di cui una base è costituita da $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 5. Ridurre a forma canonica e **disegnare nel piano xy** la conica

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 15 = 0\ .$$

Si segnala che $15^2 = 225$ e $25^2 = 625$.

Bisogna innanzitutto eliminare il termine $-12xy$, ossia diagonalizzare la matrice $B = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 20$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \ .$$

Non dimenticare di verificare (in brutta copia) che $B\underline{u}_1 = 5\underline{u}_1$ e $B\underline{u}_2 = 20\underline{u}_2$ prima di perdere tempo in conti sbagliati.

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $5(x')^2 + 20(y')^2 + 10x' - 15 = 0$. (Si ricorda che basta trasformare il binomio $2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y$, poiché sappiamo che i termini di secondo grado diventano $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, mentre il termine noto rimane ovviamente invariato). Abbiamo quindi l'equazione $(x')^2 + 4(y')^2 + 2x' - 3 = 0$, che può essere riscritta come $(x' + 1)^2 + 4(y')^2 - 4 = 0$. Pertanto la traslazione

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' \end{cases}$$

porta la conica nella forma canonica

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 \ .$$

Si tratta quindi di un'ellisse reale, con semiassi di lunghezze 2 e 1. Il suo centro C ha coordinate $X = 0$, $Y = 0$, ossia $x' = -1$, $y' = 0$, ossia $x = -1/\sqrt{5}$, $y = -2/\sqrt{5}$. I suoi assi sono le rette passanti per C e parallele rispettivamente a $\underline{u}_1$ ed a $\underline{u}_2$, ossia le rette $x + 2y = -\sqrt{5}$ e $y = 2x$. A questo punto è facile disegnare l'ellisse nel piano xy.