Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
3 febbraio 2010 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione (in forma algebrica) e tracciarne le soluzioni sul piano di Gauss

$$z^2 - (3+i)z + 8 - i = 0 \ .$$

Si segnala che $26^2 = 676$.

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = (3+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8-i) = -24 + 10i \ .$$

Calcoliamo le radici quadrate del discriminante. Sono i complessi

$$\delta = a + ib$$

tali che

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = -24 \\ 2ab & = 10 \\ a^2 + b^2 & = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576+100} = \sqrt{676} = 26 \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza si trova $2a^2 = 2$, cioè $a = \pm 1$ e quindi nella seconda $b = \pm 5$ (con a e b dello stesso segno). Abbiamo quindi le due soluzioni dell'equazione

$$\begin{cases} z_1 & = \frac{3+i+1+5i}{2} = 2 + 3i \\ z_2 & = \frac{3+i-1-5i}{2} = 1 - 2i \end{cases}$$

Esercizio 2. Si considerino i punti $A(-2;2;3)$, $B(-5;2;5)$ e $C(-3;1;3)$.

a) Scrivere l'equazione del piano Π passante per il punto A e perpendicolare alla retta r passante per B e C.

Tale piano avrà coefficienti direttori proporzionali alle coordinate del vettore $\overrightarrow{BC}$. Quindi siccome

$$\overrightarrow{BC} = (2, -1, -2)$$

l'equazione del piano sarà della forma

$$2x - y - 2z + d = 0$$

e determiniamo r inponendo il passaggio del piano per A. Facendo $x = -2$, $y = 2$ e $z = 3$ si trova $d = 12$ e quindi l'equazione del piano è

$$\Pi : 2x - y - 2z + 12 = 0 \ .$$

b) Dimostrare che il quadrilatero $ABCD$, con $D(0, 1, 1)$, è un parallelogramma (per fissare l'ordine dei punti, le diagonali sono AC e BD, cioè si incontrano A, B, C e D in questo ordine quando si fa il giro del parallelogramma).

Il punto D è il quarto vertice del parallelogramma se e solo se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ oppure se e solo se $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Siccome le coordinate del vettore $\overrightarrow{AD}$ sono le coordinate di D meno quelle di A, per ottenere le coordinate di D basta aggiungere le coordinate di $\overrightarrow{BC}$ a quelle di A. Si ottiene quindi che le coordinate (x, y, z) di D verificano

$$\begin{cases} x = -2 + 2 = 0 \\ y = 2 - 1 = 1 \\ z = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

c) Calcolare l'area del parallelogramma $ABCD$.

L'area del parallelogramme è la norma del prodotto vettoriale $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$. Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 0, 2)$$
$$\overrightarrow{AD} = (2, -1, -2)$$

e quindi

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = (2, -2, 3)$$

Troviamo quindi che $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|^2 = 17$ e quindi l'area del parallelogramma è $\sqrt{17}$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (k+1)x + y - 3z = 1 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ -x - 2y + (k+3)z = -2 \ . \end{cases}$$

a) Si discuta l'esistenza e il numero di soluzioni del sistema al variare di k.

La matrice dei coeffcienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & k+3 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è

$$\begin{aligned} \Delta &= 2k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)(2k+1) \ . \end{aligned}$$

(Si ricorda che per calcolare il determinante è meglio far comparire degli zeri; in questo caso era facile semplificare la matrice usando l'1 della seconda riga). Quindi per tutti i valori di k tranne per $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -1$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione.

Nei casi $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -1$ è facile osservare che la matrice A ha rango 2 (perché la sottomatrice 2×2 in alto a destra ha determinante 4). Anche il rango della matrice completa, cioè la matrice A alla quale si aggiunge a destra il vettore dei termini noti, è 2. Infatti, per calcolare il rango basta calcolare il determinante della matrice costituita dalle 2 colonne di destra di A e dalla colonna dei termini noti. Ma esso è nullo perché la seconda colonna di A coincide con la colonna dei termini noti. Quindi per $k = -\frac{1}{2}$ e per $k = -1$ il sistema ammette una retta di soluzioni (ossia, ∞^1 soluzioni).

b) Si risolva il sistema nei casi in cui non è determinato.

Nel caso $k = -1$ il sistema è

$$\begin{cases} y - 3z = 1 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ -x - 2y + 2z = -2 \ . \end{cases}$$

La terza riga è l'opposto della seconda, è quindi inutile. Sottraendo il doppio della prima alla seconda troviamo

$$x + 4z = 0$$

Abbiamo quindi $x = -4z$ e, nella prima equazione, $y = 3z + 1$. L'insieme delle soluzioni è quindi $\mathcal{S} = \{(-4z, 3z+1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Nel caso $k = -\frac{1}{2}$ si trova invece $z = 0$ e $x = 2 - 2y$, con y arbitrario.

In entrambi i casi, inserendo le soluzioni trovate nel sistema, si verifica che le equazioni sono soddisfatte.

Esercizio 4. Determinare, tra i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, quelli che sono sottospazi vettoriali.

a) $E_1 = \{f \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-3x) = f(-x^2)\}$.

E_1 è un sottospazio vettoriale. Infatti,

- la funzione nulla appartiene a questo sottoinsieme;
- se $f \in E_1$ e $g \in E_1$ allora per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f+g)(-3x) &= f(-3x) + g(-3x) = f(-x^2) + g(-x^2)\\ &= (f+g)(-x^2)\end{aligned}$$

  quindi $f + g \in E_1$.
- se $f \in E_1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\lambda f)(-3x) &= \lambda f(-3x) = \lambda f(-x^2)\\ &= (\lambda f)(-x^2)\end{aligned}$$

  quindi $\lambda f \in E_1$.

b) $E_2 = \{f \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)^2\}$. Si suggerisce di verificare quali sono le funzioni costanti che appartengono a E_2.

E_2 non è un sottospazio vettoriale.

Cerchiamo quali sono le funzioni costanti in E_2. Sono le funzioni tali che esiste un $c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$, vale $f(x) = c$. Applicando la relazione di cui sopra viene $c = -c^2$. Ci sono quindi due valori possibili per c: $c = 0$ e $c = -1$ (se $c \neq 0$ si può dividere per c e si ottiene questo valore). Ora se f è la funzione costante -1, allora $2f \notin E_2$; quindi E_2 non è chiuso rispetto al prodotto per una costante (oppure, stessa cosa, $f + f \notin E_2$; quindi E_2 non è chiuso rispetto alla somma).

Esercizio 5. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz - 2yz - 8x + 10y - 8z + 13 = 0\ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0\ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ -4 & 5 & -4 & 13 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 4 = 0 \\ -x + 2y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 2z - 4 = 0 \\ -4x + 5y - 4z + 13 = 0 \end{cases}$$

ovviamente equivalente a

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ -x + 2y - z = -5 \\ -4x + 5y - 4z = -13 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di quest'ultimo ha determinante nullo, mentre

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ -4 & 5 & -13 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

(Per calcolare questo determinante, si può usare il -1 presente in prima colonna per fabbricare degli zeri in prima colonna sommando la seconda riga due volte alla prima e quattro volte alla terza). Per il teorema di Rouché–Capelli, il sistema non ha soluzioni e quindi la quadrica non ha punti doppi.

b) Scrivere l'equazione del piano tangente π alla quadrica σ nel suo punto $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -2, 0)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -2, 0, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

ossia $x - \frac{1}{2}y + z - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 = 0$.

c) Dimostrare che l'intersezione tra σ e π è una retta parallela al vettore $(1,0,-1)$.

I punti dell'intersezione sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+2z^2-2xy+4xz-2yz-8x+10y-8z+13=0 \\ x-\frac{1}{2}y+z-\frac{\sqrt{2}}{2}-2=0 \end{cases}$$

Ricavando la x dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} y+2=0 \\ x-\frac{1}{2}y+z-\frac{\sqrt{2}}{2}-2=0 \end{cases}$$

a sua volta equivalente a

$$\begin{cases} y=-2 \\ x+z-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di una retta; ponendo $x=t$ e passando così alla rappresentazione parametrica si conclude che tale retta è parallela al vettore $(1,0,-1)$.