Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
3 settembre 2009 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere e tracciare sul piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$(z + 4 - 5i)^5 = 16\sqrt{3} + 16i\ .$$

Si segnala che $2^{10} = 1024$.

Per trovare le soluzioni conviene cercare le radici quinte del membro di destro. Per ciò, calcoliamo il suo modulo ρ e il suo argomento θ.

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= (16\sqrt{3})^2 + 16^2 = 256 \cdot 3 + 256 = 256 \cdot 4 = 1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \\
\rho &= 2^5 = 32 \\
\cos\theta &= \frac{16\sqrt{3}}{32} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\sin\theta &= \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \\
\theta &= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

(osservazione per il modulo: si poteva calcolare più facilmente come $\rho = 16\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 16 \cdot 2 = 32$; osservazione per l'argomento: il coseno indica che si tratta di $\pm\frac{\pi}{6}$ e il seno che tra $+\frac{\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ si tratta di $+\frac{\pi}{6}$.)
Le radici quinte di $16\sqrt{3} + 16i$ sono quindi

$$w_k = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{30} + 2ki\frac{\pi}{5}}$$

con $k = 0, ..., 4$. Le soluzioni dell'equazione sono quindi i

$$z_k = -4 + 5i + 2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{30} + 2ki\frac{\pi}{5}}\ , \quad k = 0, ..., 4.$$

I punti sono i vertici di un pentagono regolare, di centro $-4 + 5i$, di raggio 2 e con un vertice che fa un angolo $\frac{\pi}{30}$ (un sessantesimo di giro) rispetto all'orizzontale.

Esercizio 2. Si considerino i punti $A(-2;2;3)$, $B(-5;2;5)$, $C(-3;1;3)$ e $D(-3;0;8)$.

a) Scrivere l'equazione del piano Π passante per i tre punti A, B e C.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} = (-3;0;2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1;-1;0)$$

e, ponendo $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$,

$$\underline{n} = (2;-2;3)$$

Il vettore $\underline{n}$ è normale al piano Π quindi un'equazione del piano Π può essere ottenuta da

$$2(x+2) - 2(y-2) + 3(z-3) = 0$$

ovvero

$$2x - 2y + 3z - 1 = 0.$$

b) Calcolare la distanza dal punto D al piano Π.

Si può calcolare questa distanza con (almeno) due metodi. Il primo è la formula classica che si può ritrovare negli appunti o in qualsiasi libro. Il secondo è di calcolare $\overrightarrow{AD}$ da cui si ricava la distanza come il valore assoluto di

$$\frac{\overrightarrow{AD} \cdot \underline{n}}{\|\underline{n}\|}.$$

Abbiamo

$$\overrightarrow{AD} = (-1;-2;5)$$

quindi

$$\overrightarrow{AD} \cdot \underline{n} = 17.$$

D'altra parte si calcola che

$$\underline{n} \cdot \underline{n} = 17$$
$$\|\underline{n}\| = \sqrt{17}$$

e quindi la distanza tra D e Π è

$$d = \sqrt{17}.$$

c) Scrivere l'equazione parametrica della retta ortogonale al piano Π e passante per D.

Tale retta è diretta da $\underline{n}$, quindi l'equazione parametrica è

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = \quad\; - 2t \\ z = \;\; 8 + 3t \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = a \\ 3x \qquad + 6z = b \\ 3x \; + y + 3z = c \end{cases}$$

dove a, b e c sono dei parametri.

a) Calcolare il rango della matrice dei coefficienti del sistema.

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che A è di rango almeno 2 perché le due prime colonne non sono proporzionali. Anzi, il minore costituito dalle due prime righe e due prime colonne è

$$1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6 \neq 0$$

quindi la sottomatrice corrispondente è di rango 2.
Calcolando il determinante di A, si vede che è nullo per cui A ha rango 2.

b) Quale condizione devono verificare i parametri a, b e c perché il sistema ammetta soluzione?

Dal teorema di Rouché–Capelli, sappiamo che il sistema ammette soluzione se e solo se il rango della matrice completa, cioè la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & a \\ 3 & 0 & 6 & b \\ 3 & 1 & 3 & c \end{pmatrix},$$

è 2. Abbiamo visto che la matrice 2×2 costituita dalle prime due righe e dalle prime due colonne è di rango 2 così come quella costituita dalle tre prime colonne (cioè la matrice A). Dal teorema di Kronecker, la matrice B è di rango 2 se e solo se la matrice costituita dalla prima, la seconda e la quarta colonna di B ha determinante 0. La condizione da verificare è quindi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} c = 3a + 5b - 6c$$

La condizione che devono verificare i coefficienti è quindi

$$3a + 5b - 6c = 0.$$

c) Risolvere il sistema nei casi seguenti.

(a) $(a; b; c) = (3; 5; -6)$.

È ovvio che la condizione di cui alla domanda precedente non è verificata, quindi il sistema non ammette soluzione.

(b) $(a; b; c) = (16; -6; 3)$.

In questo caso invece la condizione è verificata e quindi il sistema ammette soluzione. Dal rango del sistema, cioè 2, sappiamo che l'insieme delle soluzioni è una retta.
La soluzione effettiva del sistema è classica e non richiede nessuna tecnica particolare.

Esercizio 4. Calcolare gli autovalori e **autovettori** della seguente matrice e precisare se è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

Non ci sono problemi particolari. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ (semplice) con autovettore

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\lambda_2 = 1$ (semplice) con autovettore

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e $\lambda_3 = 0$ (semplice) con autovettore

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice quindi è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$59x^2 + 24xy - 30xz + 66y^2 - 40yz + 75z^2 - 50 = 0 .$$

Sapendo che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 59 & 12 & -15 \\ 12 & 66 & -20 \\ -15 & -20 & 75 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 50$ (doppio) e $\lambda_2 = 100$ (semplice), si chiede di:

a) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

La forma canonica è $50X^2 + 50Y^2 + 100Z^2 - 50 = 0$, ossia $X^2 + Y^2 + 2Z^2 - 1 = 0$. La quadrica è pertanto un ellissoide reale.

b) Scrivere il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

Dobbiamo determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 50$ (doppio) sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 9x + 12y - 15z = 0 \\ 12x + 16y - 20z = 0 \\ -15x - 20y + 25z = 0 \end{cases}$$

che sono $y = \frac{1}{4}(5z - 3x)$, con x e z arbitrari. Per ottenere una coppia di versori ortonormali possiamo anzitutto porre $z = 0$ e quindi ottenere $(x, -\frac{3}{4}x, 0)_T$ che, una volta normalizzato, dà $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$. Imponendo poi l'ortogonalità fra $\underline{v}_1$ e $(x, \frac{1}{4}(5z - 3x), z)_T$ si trova $x = \frac{3}{5}z$ e dopo la normalizzazione si ottiene il versore $\underline{v}_2 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$. Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = 100$ (semplice), essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} -41x + 12y - 15z = 0 \\ 12x - 34y - 20z = 0 \\ -15x - 20y - 25z = 0 \end{cases}$$

Si trova $x = -\frac{3}{5}z$ e $y = -\frac{4}{5}z$, con z arbitrario. La normalizzazione dà $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi il versore che completa la base ortonormale è $\underline{v}_3 = (-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$. Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5\sqrt{2}}Y - \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5\sqrt{2}}Y - \frac{4}{5\sqrt{2}}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
3 settembre 2009 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere e tracciare sul piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$(z-5+4i)^5 = 16\sqrt{3}+16i\ .$$

Si segnala che $2^{10} = 1024$.

Per trovare le soluzioni conviene cercare le radici quinte del membro di destro. Per ciò, calcoliamo il suo modulo ρ e il suo argomento θ.

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= (16\sqrt{3})^2 + 16^2 = 256\cdot 3 + 256 = 256\cdot 4 = 1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \\
\rho &= 2^5 = 32 \\
\cos\theta &= \frac{16\sqrt{3}}{32} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\sin\theta &= \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \\
\theta &= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

(osservazione per il modulo: si poteva calcolare più facilmente come $\rho = 16\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 16\cdot 2 = 32$; osservazione per l'argomento: il coseno indica che si tratta di $\pm\frac{\pi}{6}$ e il seno che tra $+\frac{\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ si tratta di $+\frac{\pi}{6}$.)
Le radici quinte di $16\sqrt{3}+16i$ sono quindi

$$w_k = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{30}+2ki\frac{\pi}{5}}$$

con $k = 0, ..., 4$. Le soluzioni dell'equazione sono quindi i

$$z_k = 5-4i+2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{30}+2ki\frac{\pi}{5}}\ , \quad k = 0, ..., 4.$$

I punti sono i vertici di un pentagono regolare, di centro $5-4i$, di raggio 2 e con un vertice che fa un angolo $\frac{\pi}{30}$ (un sessantesimo di giro) rispetto all'orizzontale.

Esercizio 2. Si considerino i punti $A(-2;-2;-1)$, $B(0;1;-4)$, $C(-4;-4;2)$ e $D(3;1;-2)$.

a) Scrivere l'equazione del piano Π passante per i tre punti A, B e C.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} = (2;3;-3)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-2;-2;3)$$

e, ponendo $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$,

$$\underline{n} = (3;0;2)$$

Il vettore $\underline{n}$ è normale al piano Π quindi un'equazione del piano Π può essere ottenuta da

$$3(x+2) + 2(z+1) = 0$$

ovvero

$$3x + 2z + 8 = 0.$$

b) Calcolare la distanza dal punto D al piano Π.

Si può calcolare questa distanza con (almeno) due metodi. Il primo è la formula classica che si può ritrovare negli appunti o in qualsiasi libro. Il secondo è di calcolare $\overrightarrow{AD}$ da cui si ricava la distanza come il valore assoluto di

$$\frac{\overrightarrow{AD} \cdot \underline{n}}{\|\underline{n}\|}.$$

Abbiamo

$$\overrightarrow{AD} = (5;3;-1)$$

quindi

$$\overrightarrow{AD} \cdot \underline{n} = 13.$$

D'altra parte si calcola che

$$\underline{n} \cdot \underline{n} = 13$$
$$\|\underline{n}\| = \sqrt{13}$$

e quindi la distanza tra D e Π è

$$d = \sqrt{13}.$$

c) Scrivere l'equazione parametrica della retta ortogonale al piano Π e passante per D.

Tale retta è diretta da $\underline{n}$, quindi l'equazione parametrica è

$$\begin{cases} x = & 3 + 3t \\ y = & 1 \\ z = & -2 + 2t \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = a \\ 3x - y + 9z = b \\ -x + 3y - 11z = c \end{cases}$$

dove a, b e c sono dei parametri.

a) Calcolare il rango della matrice dei coefficienti del sistema.

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che A è di rango almeno 2 perché le due prime colonne non sono proporzionali. Anzi, il minore costituito dalle due prime righe e due prime colonne è

$$1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -7 \neq 0$$

quindi la sottomatrice corrispondente è di rango 2.

Calcolando il determinante di A, si vede che è nullo per cui A ha rango 2.

b) Quale condizione devono verificare i parametri a, b e c perché il sistema ammetta soluzione?

Dal teorema di Rouché–Capelli, sappiamo che il sistema ammette soluzione se e solo se il rango della matrice completa, cioè la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & a \\ 3 & -1 & 9 & b \\ -1 & 3 & -11 & c \end{pmatrix},$$

è 2. Abbiamo visto che la matrice 2×2 costituita dalle prime due righe e dalle prime due colonne è di rango 2 così come quella costituita dalle tre prime colonne (cioè la matrice A). Dal teorema di Kronecker, la matrice B è di rango 2 se e solo se la matrice costituita dalla prima, la seconda e la quarta colonna di B ha determinante 0. La condizione da verificare è quindi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & b \\ -1 & 3 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & b \\ -1 & 3 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} c = 8a - 5b - 7c$$

La condizione che devono verificare i coefficienti è quindi

$$8a - 5b - 7c = 0.$$

c) Risolvere il sistema nei casi seguenti.

(a) $(a; b; c) = (8; -5; -7)$.

È ovvio che la condizione di cui alla domanda precedente non è verificata, quindi il sistema non ammette soluzione.

(b) $(a; b; c) = (-3; -16; 8)$.

In questo caso invece la condizione è verificata e quindi il sistema ammette soluzione. Dal rango del sistema, cioè 2, sappiamo che l'insieme delle soluzioni è una retta.

La soluzione effettiva del sistema è classica e non richiede nessuna tecnica particolare.

Esercizio 4. Calcolare gli autovalori e **autovettori** della seguente matrice e precisare se è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Non ci sono problemi particolari. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ (semplice) con autovettore

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $\lambda_2 = 2$ (doppio) con autovettore

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

La matrice quindi non è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$59x^2 + 24xy - 30xz + 66y^2 - 40yz + 75z^2 - 50 = 0 .$$

Sapendo che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 59 & 12 & -15 \\ 12 & 66 & -20 \\ -15 & -20 & 75 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 50$ (doppio) e $\lambda_2 = 100$ (semplice), si chiede di:

a) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

La forma canonica è $50X^2 + 50Y^2 + 100Z^2 - 50 = 0$, ossia $X^2 + Y^2 + 2Z^2 - 1 = 0$. La quadrica è pertanto un ellissoide reale.

b) Scrivere il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

Dobbiamo determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 50$ (doppio) sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 9x + 12y - 15z = 0 \\ 12x + 16y - 20z = 0 \\ -15x - 20y + 25z = 0 \end{cases}$$

che sono $y = \frac{1}{4}(5z - 3x)$, con x e z arbitrari. Per ottenere una coppia di versori ortonormali possiamo anzitutto porre $z = 0$ e quindi ottenere $(x, -\frac{3}{4}x, 0)_T$ che, una volta normalizzato, dà $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$. Imponendo poi l'ortogonalità fra $\underline{v}_1$ e $(x, \frac{1}{4}(5z - 3x), z)_T$ si trova $x = \frac{3}{5}z$ e dopo la normalizzazione si ottiene il versore $\underline{v}_2 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$. Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = 100$ (semplice), essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} -41x + 12y - 15z = 0 \\ 12x - 34y - 20z = 0 \\ -15x - 20y - 25z = 0 \end{cases}$$

Si trova $x = -\frac{3}{5}z$ e $y = -\frac{4}{5}z$, con z arbitrario. La normalizzazione dà $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi il versore che completa la base ortonormale è $\underline{v}_3 = (-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$. Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5\sqrt{2}}Y - \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5\sqrt{2}}Y - \frac{4}{5\sqrt{2}}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
3 settembre 2009 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere e tracciare sul piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$(z-2+i)^5 = 16\sqrt{3}+16i\ .$$

Si segnala che $2^{10} = 1024$.

Per trovare le soluzioni conviene cercare le radici quinte del membro di destro. Per ciò, calcoliamo il suo modulo ρ e il suo argomento θ.

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= (16\sqrt{3})^2 + 16^2 = 256\cdot 3 + 256 = 256 \cdot 4 = 1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \\
\rho &= 2^5 = 32 \\
\cos\theta &= \frac{16\sqrt{3}}{32} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\sin\theta &= \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \\
\theta &= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

(osservazione per il modulo: si poteva calcolare più facilmente come $\rho = 16\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 16\cdot 2 = 32$; osservazione per l'argomento: il coseno indica che si tratta di $\pm\frac{\pi}{6}$ e il seno che tra $+\frac{\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ si tratta di $+\frac{\pi}{6}$.)
Le radici quinte di $16\sqrt{3}+16i$ sono quindi

$$w_k = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{30}+2ki\frac{\pi}{5}}$$

con $k = 0, ..., 4$. Le soluzioni dell'equazione sono quindi i

$$z_k = 2 - i + 2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{30}+2ki\frac{\pi}{5}}\ , \quad k = 0, ..., 4.$$

I punti sono i vertici di un pentagono regolare, di centro $2-i$, di raggio 2 e con un vertice che fa un angolo $\frac{\pi}{30}$ (un sessantesimo di giro) rispetto all'orizzontale.

Esercizio 2. Si considerino i punti $A(1;1;-1)$, $B(-2;4;-3)$, $C(-1;1;-2)$ e $D(-5;5;3)$.

a) Scrivere l'equazione del piano Π passante per i tre punti A, B e C.

Abbiamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-3;3;-2)\\ \overrightarrow{AC} &= (-2;0;-1)\end{aligned}$$

e, ponendo $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$,

$$\underline{n} = (-3;1;6)$$

Il vettore $\underline{n}$ è normale al piano Π quindi un'equazione del piano Π può essere ottenuta da

$$-3(x-1) + (y-1) + 6(z+1) = 0$$

ovvero

$$3x - y - 6z - 8 = 0.$$

b) Calcolare la distanza dal punto D al piano Π.

Si può calcolare questa distanza con (almeno) due metodi. Il primo è la formula classica che si può ritrovare negli appunti o in qualsiasi libro. Il secondo è di calcolare $\overrightarrow{AD}$ da cui si ricava la distanza come il valore assoluto di

$$\frac{\overrightarrow{AD} \cdot \underline{n}}{\|\underline{n}\|}.$$

Abbiamo

$$\overrightarrow{AD} = (-6;4;4)$$

quindi

$$\overrightarrow{AD} \cdot \underline{n} = 46.$$

D'altra parte si calcola che

$$\begin{aligned}\underline{n} \cdot \underline{n} &= 46\\ \|\underline{n}\| &= \sqrt{46}\end{aligned}$$

e quindi la distanza tra D e Π è

$$d = \sqrt{46}.$$

c) Scrivere l'equazione parametrica della retta ortogonale al piano Π e passante per D.

Tale retta è diretta da $\underline{n}$, quindi l'equazione parametrica è

$$\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = \quad 5 - t \\ z = \quad 3 - 6t \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ 3x - y + 9z = b \\ -x - 2y + 4z = c \end{cases}$$

dove a, b e c sono dei parametri.

a) Calcolare il rango della matrice dei coefficienti del sistema.

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che A è di rango almeno 2 perché le due prime colonne non sono proporzionali. Anzi, il minore costituito dalle due prime righe e due prime colonne è

$$1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -4 \neq 0$$

quindi la sottomatrice corrispondente è di rango 2.

Calcolando il determinante di A, si vede che è nullo per cui A ha rango 2.

b) Quale condizione devono verificare i parametri a, b e c perché il sistema ammetta soluzione?

Dal teorema di Rouché–Capelli, sappiamo che il sistema ammette soluzione se e solo se il rango della matrice completa, cioè la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 3 & -1 & 9 & b \\ -1 & -2 & 4 & c \end{pmatrix},$$

è 2. Abbiamo visto che la matrice 2×2 costituita dalle prime due righe e dalle prime due colonne è di rango 2 così come quella costituita dalle tre prime colonne (cioè la matrice A). Dal teorema di Kronecker, la matrice B è di rango 2 se e solo se la matrice costituita dalla prima, la seconda e la quarta colonna di B ha determinante 0. La condizione da verificare è quindi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & -1 & b \\ -1 & -2 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & -1 & b \\ -1 & -2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} c = -7a + b - 4c$$

La condizione che devono verificare i coefficienti è quindi

$$7a - b + 4c = 0.$$

c) Risolvere il sistema nei casi seguenti.

   (a) $(a; b; c) = (7; -1; 4)$.

   È ovvio che la condizione di cui alla domanda precedente non è verificata, quindi il sistema non ammette soluzione.

   (b) $(a; b; c) = (-6; -14; 7)$.

   In questo caso invece la condizione è verificata e quindi il sistema ammette soluzione. Dal rango del sistema, cioè 2, sappiamo che l'insieme delle soluzioni è una retta.

   La soluzione effettiva del sistema è classica e non richiede nessuna tecnica particolare.

Esercizio 4. Calcolare gli autovalori e **autovettori** della seguente matrice e precisare se è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Non ci sono problemi particolari. Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ (semplice) con autovettore

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $\lambda_2 = -2$ (doppio) con autovettore

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice quindi non è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$23x^2 - 72xy + 90xz + 2y^2 + 120yz - 25z^2 - 50 = 0\ .$$

Sapendo che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 23 & -36 & 45 \\ -36 & 2 & 60 \\ 45 & 60 & -25 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 50$ (doppio) e $\lambda_2 = -100$ (semplice), si chiede di:

a) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

La forma canonica è $50X^2 + 50Y^2 - 100Z^2 - 50 = 0$, ossia $X^2 + Y^2 - 2Z^2 - 1 = 0$. La quadrica è pertanto un iperboloide iperbolico (o a una falda).

b) Scrivere il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

Dobbiamo determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 50$ (doppio) sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -27x - 36y + 45z = 0 \\ -36x - 48y + 60z = 0 \\ 45x + 60y - 75z = 0 \end{cases}$$

che sono $y = \frac{1}{4}(5z - 3x)$, con x e z arbitrari. Per ottenere una coppia di versori ortonormali possiamo anzitutto porre $z = 0$ e quindi ottenere $(x, -\frac{3}{4}x, 0)_T$ che, una volta normalizzato, dà $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$. Imponendo poi l'ortogonalità fra $\underline{v}_1$ e $(x, \frac{1}{4}(5z - 3x), z)_T$ si trova $x = \frac{3}{5}z$ e dopo la normalizzazione si ottiene il versore $\underline{v}_2 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$. Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = -100$ (semplice), essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 123x - 36y + 45z = 0 \\ -36x + 102y + 60z = 0 \\ 45x + 60y + 75z = 0 \end{cases}$$

Si trova $x = -\frac{3}{5}z$ e $y = -\frac{4}{5}z$, con z arbitrario. La normalizzazione dà $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi il versore che completa la base ortonormale è $\underline{v}_3 = (-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$. Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5\sqrt{2}}Y - \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5\sqrt{2}}Y - \frac{4}{5\sqrt{2}}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z \end{cases}$$

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
3 settembre 2009 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere e tracciare sul piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$(z+1-2i)^5 = 16\sqrt{3} + 16i\ .$$

Si segnala che $2^{10} = 1024$.

Per trovare le soluzioni conviene cercare le radici quinte del membro di destro. Per ciò, calcoliamo il suo modulo ρ e il suo argomento θ.

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= (16\sqrt{3})^2 + 16^2 = 256 \cdot 3 + 256 = 256 \cdot 4 = 1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \\
\rho &= 2^5 = 32 \\
\cos\theta &= \frac{16\sqrt{3}}{32} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\sin\theta &= \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \\
\theta &= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

(osservazione per il modulo: si poteva calcolare più facilmente come $\rho = 16\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 16 \cdot 2 = 32$; osservazione per l'argomento: il coseno indica che si tratta di $\pm\frac{\pi}{6}$ e il seno che tra $+\frac{\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ si tratta di $+\frac{\pi}{6}$.)
Le radici quinte di $16\sqrt{3} + 16i$ sono quindi

$$w_k = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{30} + 2ki\frac{\pi}{5}}$$

con $k = 0, ..., 4$. Le soluzioni dell'equazione sono quindi i

$$z_k = -1 + 2i + 2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{30} + 2ki\frac{\pi}{5}}\ , \quad k = 0, ..., 4.$$

I punti sono i vertici di un pentagono regolare, di centro $-1 + 2i$, di raggio 2 e con un vertice che fa un angolo $\frac{\pi}{30}$ (un sessantesimo di giro) rispetto all'orizzontale.

Esercizio 2. Si considerino i punti $A(1;0;-3)$, $B(-1;2;-5)$, $C(0;-1;-3)$ e $D(-3;4;-1)$.

a) Scrivere l'equazione del piano Π passante per i tre punti A, B e C.

Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} = (-2;2;-2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1;-1;0)$$

e, ponendo $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$,

$$\underline{n} = (-2;2;4)$$

Il vettore $\underline{n}$ è normale al piano Π quindi un'equazione del piano Π può essere ottenuta da

$$-2(x-1) + 2(y) + 4(z+3) = 0$$

ovvero

$$x - y - 2z - 7 = 0.$$

b) Calcolare la distanza dal punto D al piano Π.

Si può calcolare questa distanza con (almeno) due metodi. Il primo è la formula classica che si può ritrovare negli appunti o in qualsiasi libro. Il secondo è di calcolare $\overrightarrow{AD}$ da cui si ricava la distanza come il valore assoluto di

$$\frac{\overrightarrow{AD} \cdot \underline{n}}{\|\underline{n}\|}.$$

Abbiamo

$$\overrightarrow{AD} = (-4;4;2)$$

quindi

$$\overrightarrow{AD} \cdot \underline{n} = 24.$$

D'altra parte si calcola che

$$\underline{n} \cdot \underline{n} = 24$$
$$\|\underline{n}\| = \sqrt{24}$$

e quindi la distanza tra D e Π è

$$d = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

c) Scrivere l'equazione parametrica della retta ortogonale al piano Π e passante per D.

Tale retta è diretta da $\underline{n}$, quindi l'equazione parametrica è

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4 - t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} -3x - 2y = a \\ 2x + 3y - 5z = b \\ x + 3y - 7z = c \end{cases}$$

dove a, b e c sono dei parametri.

a) Calcolare il rango della matrice dei coefficienti del sistema.

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che A è di rango almeno 2 perché le due prime colonne non sono proporzionali. Anzi, il minore costituito dalle due prime righe e due prime colonne è

$$-3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = -5 \neq 0$$

quindi la sottomatrice corrispondente è di rango 2.

Calcolando il determinante di A, si vede che è nullo per cui A ha rango 2.

b) Quale condizione devono verificare i parametri a, b e c perché il sistema ammetta soluzione?

Dal teorema di Rouché–Capelli, sappiamo che il sistema ammette soluzione se e solo se il rango della matrice completa, cioè la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & a \\ 2 & 3 & -5 & b \\ 1 & 3 & -7 & c \end{pmatrix},$$

è 2. Abbiamo visto che la matrice 2×2 costituita dalle prime due righe e dalle prime due colonne è di rango 2 così come quella costituita dalle tre prime colonne (cioè la matrice A). Dal teorema di Kronecker, la matrice B è di rango 2 se e solo se la matrice costituita dalla prima, la seconda e la quarta colonna di B ha determinante 0. La condizione da verificare è quindi

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & a \\ 2 & 3 & b \\ 1 & 3 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & a \\ 2 & 3 & b \\ 1 & 3 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} c = 3a + 7b - 5c$$

La condizione che devono verificare i coefficienti è quindi

$$3a + 7b - 5c = 0.$$

c) Risolvere il sistema nei casi seguenti.

(a) $(a; b; c) = (3; 7; -5)$.

È ovvio che la condizione di cui alla domanda precedente non è verificata, quindi il sistema non ammette soluzione.

(b) $(a; b; c) = (19; -6; 3)$.

In questo caso invece la condizione è verificata e quindi il sistema ammette soluzione. Dal rango del sistema, cioè 2, sappiamo che l'insieme delle soluzioni è una retta.

La soluzione effettiva del sistema è classica e non richiede nessuna tecnica particolare.

Esercizio 4. Calcolare gli autovalori e **autovettori** della seguente matrice e precisare se è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & -8 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Non ci sono problemi particolari. Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ (semplice) con autovettore

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $\lambda_2 = 1$ (doppio) con autovettore

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice quindi non è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$23x^2 - 72xy + 90xz + 2y^2 + 120yz - 25z^2 - 50 = 0 \ .$$

Sapendo che gli autovalori della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 23 & -36 & 45 \\ -36 & 2 & 60 \\ 45 & 60 & -25 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 50$ (doppio) e $\lambda_2 = -100$ (semplice), si chiede di:

a) Determinare la forma canonica di σ e riconoscere di che quadrica si tratta.

La forma canonica è $50X^2 + 50Y^2 - 100Z^2 - 50 = 0$, ossia $X^2 + Y^2 - 2Z^2 - 1 = 0$. La quadrica è pertanto un iperboloide iperbolico (o a una falda).

b) Scrivere il cambiamento di coordinate che porta la quadrica in forma canonica.

Dobbiamo determinare una base ortonormale di autovettori della matrice B. Quelli relativi all'autovalore $\lambda_1 = 50$ (doppio) sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -27x - 36y + 45z = 0 \\ -36x - 48y + 60z = 0 \\ 45x + 60y - 75z = 0 \end{cases}$$

che sono $y = \frac{1}{4}(5z - 3x)$, con x e z arbitrari. Per ottenere una coppia di versori ortonormali possiamo anzitutto porre $z = 0$ e quindi ottenere $(x, -\frac{3}{4}x, 0)_T$ che, una volta normalizzato, dà $\underline{v}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)_T$. Imponendo poi l'ortogonalità fra $\underline{v}_1$ e $(x, \frac{1}{4}(5z - 3x), z)_T$ si trova $x = \frac{3}{5}z$ e dopo la normalizzazione si ottiene il versore $\underline{v}_2 = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$. Per quanto riguarda gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = -100$ (semplice), essi si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 123x - 36y + 45z = 0 \\ -36x + 102y + 60z = 0 \\ 45x + 60y + 75z = 0 \end{cases}$$

Si trova $x = -\frac{3}{5}z$ e $y = -\frac{4}{5}z$, con z arbitrario. La normalizzazione dà $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi il versore che completa la base ortonormale è $\underline{v}_3 = (-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_T$. Abbiamo così ottenuto la matrice (ortogonale)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che dà il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5\sqrt{2}}Y - \frac{3}{5\sqrt{2}}Z \\ y = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5\sqrt{2}}Y - \frac{4}{5\sqrt{2}}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z \end{cases}$$