Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
8 luglio 2009 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'applicazione L_k, dipendente dal parametro k, definita da:

$$\begin{aligned} L_k : \mathbb{R}_1[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ a + bx &\longmapsto \begin{pmatrix} b + (k-2)ab \\ 2a - (k^2 - 4) \\ a - b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione necessaria affinché L_k sia lineare ?

L'immagine del vettore nullo, cioè quello con $a = b = 0$ deve essere il vettore nullo. L'immagine del vettore nullo è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k^2 - 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi la condizione necessaria è che $k = \pm 2$.

b) Per quali valori di k trovati al punto a) l'applicazione L_k è effettivamente lineare ?

Per i valori di k trovati al punto a), abbiamo $L_k(a + bx) = \begin{pmatrix} b + (k-2)ab \\ 2a \\ a - b \end{pmatrix}$. Il termine da eliminare è quello in ab, e ciò necessita $k = 2$. Si può arrivare a questa conclusione considerando il polinomio $P = 1 + x$ per il quale $L_k(P) = \begin{pmatrix} k - 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre $L_k(2P) = L_k(2+2x) = \begin{pmatrix} 4k-6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi $L_k(2P) = 2L_k(P)$ se e solo se $k = 2$. L'applicazione risultante è quindi

$$\begin{aligned} L = L_2 : \ \mathbb{R}_1[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ a + bx &\longmapsto \begin{pmatrix} b \\ 2a \\ a-b \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

L'applicazione L è "ovviamente" lineare, per primo perché è l'applicazione lineare associata alla matrice A di cui alla domanda c), ma si può anche verificare in base alla definizione, prendendo $P = a + bx$, $Q = c + dx$, λ e $\mu \in \mathbb{R}$ e verificare che

$$L(\lambda P + \mu Q) = L\big(\lambda a + \mu c + (\lambda b + \mu d)x\big) = \lambda L(P) + \mu L(Q).$$

c) Per i valori di k trovati nel punto b), determinare la matrice di L_k nelle basi canoniche

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1[x]} = \{1, x\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1\ 0\ 0)_T, (0\ 1\ 0)_T, (0\ 0\ 1)_T\}$$

L'applicazione è esplicitata sopra, la sua matrice nelle basi canoniche è immediata ed è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori e gli autovettori di A.

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(\lambda-2)^2$, ossia $\lambda_1 = 4$ (autovalore semplice) e $\lambda_2 = 2$ (autovalore doppio). Gli autovettori relativi a λ_1 sono i vettori non nulli $\underline{u}_1$ tali che $(A - 4I)\underline{u}_1 = \underline{0}$. Posto

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e risolto il corrispondente sistema lineare, si trova $x = y = 0$, mentre z è arbitrario (diverso da zero). Quindi

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

con $z \neq 0$. Gli autovettori relativi a λ_2 sono invece i vettori non nulli $\underline{u}_2$ tali che $(A-2I)\underline{u}_2 = \underline{0}$. Si trova che

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} ,$$

sempre con $z \neq 0$.

b) Stabilire se A è diagonalizzabile.

Abbiamo appena visto che non è possibile formare una base di $\mathbb{R}^3$ con gli autovettori di A. Pertanto la matrice A non è diagonalizzabile. Alternativamente, si può osservare che λ_2 non è un autovalore regolare, poiché la sua molteplicità algebrica è $m_2 = 2$, mentre la sua molteplicità geometrica vale $d_2 = 3 - \mathrm{car}(A-2I) = 3-2 = 1$.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ 4x + (k-1)y - 2z = 1 \\ 9x + 3y - 5z = 3 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & k-1 & -2 \\ 9 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & k-1 & -2 \\ 9 & 5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & k-1 & -2 \\ 0 & 2-k & 0 \end{vmatrix} \\ &= (k-2) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2(k-2) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq 2$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ 4x + (k-1)y - 2z = 1 \\ (2-k)y = 0 \qquad \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq 2$), quindi $x - z = 1$ (differenza delle due prime), quindi $2x = -1$ (la seconda meno due volte $x - z = 1$), cioè $x = -\frac{1}{2}$ e quindi $z = x - 1 = -\frac{3}{2}$.

Ora, se $k = 2$, i sistemi di cui sopra rimangono equivalenti a quello iniziale. La seconda equazione dell'ultimo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Il sistema di partenza è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ 4x + \ \ y - 2z = 1 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x$ (la prima meno due volte la seconda) e quindi $y = 2x + 1$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \\ 3x \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 4c. Considerata l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a;b;c) &\longmapsto (2a - 3b + 5c; -a + 3b - 3c) \end{aligned}$$

Determinare una base del nucleo e dell'immagine di f e la sua matrice nelle basi $\mathcal{B}_1 = \{\underline{v}_1 = (1;-2;-3), \underline{v}_2 = (-2;-1;2), \underline{v}_3 = (3;4;-1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\underline{w}_1 = (2;-1), \underline{w}_2 = (1;-1)\}$.

Il nucleo di f è l'insieme dei vettori che hanno come immagine il vettore nullo, cioè

$$\operatorname{Ker} f = \{(a;b;c) : 2a - 3b + 5c = -a + 3b - 3c = 0\}.$$

Possiamo eliminare facilmente a tra le due equazioni e troviamo

$$3b - c = 0$$

e quindi $c = 3b$ che conduce a $a = -6b$. Abbiamo quindi

$$\operatorname{Ker} f = \{b(-6;1;3)\}.$$

Siccome il nucleo di f è di dimensione 1, la sua immagine è di dimensione $\dim \mathbb{R}^3 - 1 = 3 - 1 = 2$. Siccome $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2, l'immagine è tutta $\mathbb{R}^2$. Quindi qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ risponde alla domanda, in particolare l'immagine dei due primi vettori della base canonica,

$$\underline{u}_1 = (2;-1) \quad \text{e} \quad \underline{u}_2 = (-3;3).$$

Calcoliamo l'immagine dei tre vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$. Abbiamo

$$f(\underline{v}_1) = (-7;2), \quad f(\underline{v}_2) = (9;-7) \quad \text{e} \quad f(\underline{v}_3) = (-11;12).$$

Adesso bisogna calcolare i coefficienti di queste immagini nella base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Varie possibilità si offrono: o si ricolve i 3 sistemi $x_i\underline{w}_1 + y_i\underline{w}_2 = f(\underline{v}_i)$, o si calcola l'inversa della

matrice della base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ o si calcolano le coordinate della base canonica nella base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Scegliamo quest'ultima. Abbiamo

$$\begin{cases} \underline{w}_1 = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \\ \underline{w}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \underline{w}_1 \qquad\quad = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \\ \underline{w}_2 - \underline{w}_1 = -\underline{e}_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \underline{w}_1 - 2(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) = -\underline{e}_2 \\ \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad\qquad = \underline{e}_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \;\; = \underline{e}_1 \\ \underline{w}_1 - 2\underline{w}_2 = \underline{e}_2 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} f(\underline{v}_1) &= (-7; 2) = -7\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 \\ &= -7(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) + 2(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = -5\underline{w}_1 + 3\underline{w}_2 \\ f(\underline{v}_2) &= (9; -7) = 9\underline{e}_1 - 7\underline{e}_2 \\ &= 9(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) - 7(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = 2\underline{w}_1 + 5\underline{w}_2 \\ f(\underline{v}_3) &= (-11; 12) = -11\underline{e}_1 + 12\underline{e}_2 \\ &= -11(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) + 12(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = \underline{w}_1 - 13\underline{w}_2. \end{aligned}$$

Quindi la matrice ricercata è

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -13 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 5c. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$2x^2 + 4y^2 - z^2 - 4x + 16y + 2z + 17 = 0 .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 8 & 1 & 17 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases}2x-2=0\\4y+8=0\\-z+1=0\\-2x+8y+z+17=0\end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(1,-2,1)$. Queste sono quindi le coordinate dell'unico punto doppio di σ.

b) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(1,-1,3)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(1,-1,3,1)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=0,$$

ossia $2y-z+5=0$.

c) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

Appello

Esercizio 3a. Data l'equazione nel campo complesso

$$z\left((2+i)^2+2\right)=4+2i$$

determinare la forma algebrica di z, $\overline{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ e calcolare $|z|$. Attenzione: per il calcolo di $|z|$, non sono necessari conti troppo difficili.

Sviluppando il quadrato, l'equazione è equivalente a

$$z\,(5+4i)=4+2i$$

e quindi

(*) $$z=\frac{4+2i}{5+4i}.$$

Razionalizziamo il denominatore e troviamo quindi

$$z = \frac{28 - 6i}{41}.$$

Abbiamo quindi immediatamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{28}{41} \\ \operatorname{Im} z &= -\frac{6}{41} \\ \bar{z} &= \frac{28 + 6i}{41} \end{aligned}$$

Per il calcolo di $|z|$, usiamo l'equazione (*) perché il modulo di una frazione è la frazione dei moduli. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \frac{(4+2i)(4-2i)}{(5+4i)(5-4i)} = \frac{4^2+2^2}{5^2+4^2} = \frac{20}{41} \\ |z| &= \sqrt{\frac{20}{41}} \end{aligned}$$

Esercizio 4a. Siano V_1 e V_2 i due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ così costituiti:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(a-2b+3c; 2a+5b+3c; -a+3b-2c; a-3b-2c) \mid (a;b;c) \in \mathbb{R}^3\} \\ V_2 &= \{(x;y;z;t) \mid 3x - y + 3z + t = 0\}. \end{aligned}$$

a) Determinare la dimensione di ciascuno dei 2 sottospazi vettoriali.

Lo spazio V_1 è costituito dalle combinazioni lineari dei tre vettori

$$\underline{u}_1 = (1;2;-1;1), \quad \underline{u}_2 = (-2;5;3;-3), \quad \underline{u}_3 = (3;3;-2;-2)$$

Quindi $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ è una famiglia generatrice di V_1. Possiamo calcolare la caratteristica della matrice A costituita da questi tre vettori usando il metodo di Kronecker:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

I determinanti delle 3 sottomatrici segnate sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \det A_1 &= 1 \\ \det A_2 &= 9 \\ \det A_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 12. \end{aligned}$$

Quindi i 3 vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di V_1, quindi V_1 è di dimensione 3.

Per V_2, si vede dall'equazione che $t = -3x + y - 3z$ e quindi

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x; y; z; -3x + y - 3z)\} \\ &= \{x(1; 0; 0; -3) + y(0; 1; 0; 1) + z(0; 0; 1; -3)\} \end{aligned}$$

Quindi una base di V_2 è data da

$$\underline{v}_1 = (1; 0; 0; -3), \quad \underline{v}_2 = (0; 1; 0; 1), \quad \underline{v}_3 = (0; 0; 1; -3)$$

(Il fatto che sono linearmente indipendenti è ovvio grazie alle tre prime componenti.) Quindi V_2 è di dimensione 3.

b) Dimostrare che la loro intersezione $V = V_1 \cap V_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ (non basta ricordare che l'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale: bisogna dimostrarlo).

Non dipende dai particolari V_1 e V_2 che stiamo considerando.

- Sappiamo che $\underline{0} \in V_1$ e $\underline{0} \in V_2$ per cui $\underline{0} \in V = V_1 \cap V_2$ e quindi $V \neq \emptyset$.
- Se $\underline{u}$ e $\underline{v} \in V$, allora $\underline{u} \in V_1$, $\underline{u} \in V_2$, $\underline{v} \in V_1$ e $\underline{v} \in V_2$. Dal fatto che $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono entrambi in V_1, si vede che $\underline{u} + \underline{v} \in V_1$. Nello stesso modo, $\underline{u} \in V_2$, $\underline{v} \in V_2$ e quindi $\underline{u} + \underline{v} \in V_2$. Si deduce che $\underline{u} + \underline{v} \in V_1 \cap V_2 = V$.
- Nello stesso modo sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{u} \in V$ quindi $\underline{u} \in V_1$ e $\underline{u} \in V_2$. Segue che $\lambda\underline{u} \in V_1$ da una parte e $\lambda\underline{u} \in V_2$ dall'altra, quindi $\lambda\underline{u} \in V_1 \cap V_2 = V$.

c) Determinare una base di V.

I vettori di V_1 che stanno in V_2 saranno i $(a-2b+3c; 2a+5b+3c; -a+3b-2c; a-3b-2c)$ tali che $3(a - 2b + 3c) - (2a + 5b + 3c) + 3(-a + 3b - 2c) + (a - 3b - 2c) = 0$. La condizione è quindi

$$-a - 5b - 2c = 0.$$

Possiamo quindi limitarci ai vettori di V_1 che verificano in più

$$a = -5b - 2c,$$

cioè ai vettori

$$(-7b + c; -5b - c; 8b; -8b - 4c)$$

ovvero

$$b\underline{w}_1 + c\underline{w}_2, \quad \text{con} \quad \underline{w}_1 = (-7; -5; 8; -8) \quad \text{e} \quad \underline{w}_2 = (1; -1; 0; -4).$$

È immediato vedere che questi due vettori sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V.

Esercizio 5a. Si considerino le rette

$$r: \quad \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x + y + 2z + 8 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

e il piano π di equazione $5x - 3y - 3z + 1 = 0$.

a) Trovare il punto d'intersezione A tra la retta r e il piano π.

Inserendo le equazioni di r in quella di π si trova $t = 1$. Quindi le coordinate di A sono $(1, 2, 0)$.

b) Trovare il punto d'intersezione B tra la retta s e il piano π.

Basta risolvere (per esempio, con il metodo di sostituzione) il sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z + 8 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \\ 5x - 3y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

Le coordinate di B risultano essere $(-2, 0, -3)$.

c) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e $C(1, 1, 1)$.

L'area cercata è la metà della norma di $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Poiché $\overrightarrow{AB} = (-3, -2, -3)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$, si ha che $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-5, 3, 3)$ e quindi l'area del triangolo vale $\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + 18} = \frac{\sqrt{43}}{2}$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
8 luglio 2009 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'applicazione L_k, dipendente dal parametro k, definita da:

$$L_k : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$a + bx \longmapsto \begin{pmatrix} b + (k+1)ab \\ 2a - (k^2 - 1) \\ a - b \end{pmatrix}$$

a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione necessaria affinché L_k sia lineare ?

L'immagine del vettore nullo, cioè quello con $a = b = 0$ deve essere il vettore nullo. L'immagine del vettore nullo è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k^2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi la condizione necessaria è che $k = \pm 1$.

b) Per quali valori di k trovati al punto a) l'applicazione L_k è effettivamente lineare ?

Per i valori di k trovati al punto a), abbiamo $L_k(a + bx) = \begin{pmatrix} b + (k+1)ab \\ 2a \\ a - b \end{pmatrix}$. Il termine da eliminare è quello in ab, e ciò necessita $k = -1$. Si può arrivare a questa conclusione considerando il polinomio $P = 1 + x$ per il quale $L_k(P) = \begin{pmatrix} k+2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre $L_k(2P) = L_k(2+2x) = \begin{pmatrix} 4k+6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi $L_k(2P) = 2L_k(P)$ se e solo se $k=-1$. L'applicazione risultante è quindi

$$\begin{aligned} L = L_{-1} :\ \mathbb{R}_1[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ a+bx &\longmapsto \begin{pmatrix} b \\ 2a \\ a-b \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

L'applicazione L è "ovviamente" lineare, per primo perché è l'applicazione lineare associata alla matrice A di cui alla domanda c), ma si può anche verificare in base alla definizione, prendendo $P = a+bx$, $Q = c+dx$, λ e $\mu \in \mathbb{R}$ e verificare che

$$L(\lambda P + \mu Q) = L\big(\lambda a + \mu c + (\lambda b + \mu d)x\big) = \lambda L(P) + \mu L(Q).$$

c) Per i valori di k trovati nel punto b), determinare la matrice di L_k nelle basi canoniche

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1[x]} = \{1, x\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1\ 0\ 0)_T, (0\ 1\ 0)_T, (0\ 0\ 1)_T\}$$

L'applicazione è esplicitata sopra, la sua matrice nelle basi canoniche è immediata ed è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori e gli autovettori di A.

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$, ossia $\lambda_1 = 1$ (autovalore semplice) e $\lambda_2 = 2$ (autovalore doppio). Gli autovettori relativi a λ_1 sono i vettori non nulli $\underline{u}_1$ tali che $(A-I)\underline{u}_1 = \underline{0}$. Posto

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e risolto il corrispondente sistema lineare, si trova $x = y = 0$, mentre z è arbitrario (diverso da zero). Quindi

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

con $z \neq 0$. Gli autovettori relativi a λ_2 sono invece i vettori non nulli $\underline{u}_2$ tali che $(A - 2I)\underline{u}_2 = \underline{0}$. Si trova che

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} ,$$

sempre con $z \neq 0$.

b) Stabilire se A è diagonalizzabile.

Abbiamo appena visto che non è possibile formare una base di $\mathbb{R}^3$ con gli autovettori di A. Pertanto la matrice A non è diagonalizzabile. Alternativamente, si può osservare che λ_2 non è un autovalore regolare, poiché la sua molteplicità algebrica è $m_2 = 2$, mentre la sua molteplicità geometrica vale $d_2 = 3 - \mathrm{car}(A - 2I) = 3 - 2 = 1$.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 3 \\ 4x + (k-2)y - 2z = 2 \\ 9x + 3y - 5z = 5 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & k-2 & -2 \\ 9 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & k-2 & -2 \\ 9 & 5 & -5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & k-2 & -2 \\ 0 & 3-k & 0 \end{vmatrix} \\ &= (k-3) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2(k-3) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq 3$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 3 \\ 4x + (k-2)y - 2z = 2 \\ (3-k)y = 0 \qquad \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq 3$), quindi $x - z = 1$ (differenza delle due prime), quindi $2x = 0$ (la seconda meno due volte $x - z = 1$), cioè $x = 0$ e quindi $z = x - 1 = -1$.

Ora, se $k = 3$, i sistemi di cui sopra rimangono equivalenti a quello iniziale. La seconda equazione dell'ultimo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Il sistema di partenza è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 3 \\ 4x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x - 1$ (la prima meno due volte la seconda) e quindi $y = 2x$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x-1 \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 4c. Considerata l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a;b;c) &\longmapsto (2a - 3b + 5c; -a + 4b - 3c) \end{aligned}$$

Determinare una base del nucleo e dell'immagine di f e la sua matrice nelle basi $\mathcal{B}_1 = \{\underline{v}_1 = (1;-2;-3), \underline{v}_2 = (-2;-1;2), \underline{v}_3 = (3;4;-1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\underline{w}_1 = (2;-1), \underline{w}_2 = (1;-1)\}$.

Il nucleo di f è l'insieme dei vettori che hanno come immagine il vettore nullo, cioè

$$\operatorname{Ker} f = \{(a;b;c) : 2a - 3b + 5c = -a + 4b - 3c = 0\}.$$

Possiamo eliminare facilmente a tra le due equazioni e troviamo

$$5b - c = 0$$

e quindi $c = 5b$ che conduce a $a = -11b$. Abbiamo quindi

$$\operatorname{Ker} f = \{b(-11;1;5)\}.$$

Siccome il nucleo di f è di dimensione 1, la sua immagine è di dimensione $\dim \mathbb{R}^3 - 1 = 3 - 1 = 2$. Siccome $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2, l'immagine è tutta $\mathbb{R}^2$. Quindi qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ risponde alla domanda, in particolare l'immagine dei due primi vettori della base canonica,

$$\underline{u}_1 = (2;-1) \quad \text{e} \quad \underline{u}_2 = (-3;4).$$

Calcoliamo l'immagine dei tre vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$. Abbiamo

$$f(\underline{v}_1) = (-7;0), \quad f(\underline{v}_2) = (9;-8) \quad \text{e} \quad f(\underline{v}_3) = (-11;16).$$

Adesso bisogna calcolare i coefficienti di queste immagini nella base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Varie possibilità si offrono: o si ricolve i 3 sistemi $x_i\underline{w}_1 + y_i\underline{w}_2 = f(\underline{v}_i)$, o si calcola l'inversa della

matrice della base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ o si calcolano le coordinate della base canonica nella base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Scegliamo quest'ultima. Abbiamo

$$\begin{cases} \underline{w}_1 = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \\ \underline{w}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \underline{w}_1 \qquad\quad = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \\ \underline{w}_2 - \underline{w}_1 = -\underline{e}_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \underline{w}_1 - 2(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) = -\underline{e}_2 \\ \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad\qquad = \underline{e}_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \ = \underline{e}_1 \\ \underline{w}_1 - 2\underline{w}_2 = \underline{e}_2 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} f(\underline{v}_1) &= (-7; 0) = -7\underline{e}_1 \\ &= -7(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) = -7\underline{w}_1 + 7\underline{w}_2 \\ f(\underline{v}_2) &= (9; -8) = 9\underline{e}_1 - 8\underline{e}_2 \\ &= 9(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) - 8(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = \underline{w}_1 + 7\underline{w}_2 \\ f(\underline{v}_3) &= (-11; 16) = -11\underline{e}_1 + 16\underline{e}_2 \\ &= -11(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) + 16(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = 5\underline{w}_1 - 21\underline{w}_2 . \end{aligned}$$

Quindi la matrice ricercata è

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 5 \\ 7 & 7 & -21 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 5c. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$2x^2 + 4y^2 - z^2 - 4x + 16y + 6z + 9 = 0 .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 8 & 3 & 9 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases}2x-2=0\\4y+8=0\\-z+3=0\\-2x+8y+3z+9=0\end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(1,-2,3)$. Queste sono quindi le coordinate dell'unico punto doppio di σ.

b) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(1,-1,5)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(1,-1,5,1)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=0\ ,$$

ossia $2y-z+7=0$.

c) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

Appello

Esercizio 3a. Data l'equazione nel campo complesso

$$z\left((4-i)^2+2\right)=6+2i$$

determinare la forma algebrica di z, $\overline{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ e calcolare $|z|$. Attenzione: per il calcolo di $|z|$, non sono necessari conti troppo difficili.

Sviluppando il quadrato, l'equazione è equivalente a

$$z\,(17-8i)=6+2i$$

e quindi

(*) $$z=\frac{6+2i}{17-8i}.$$

Razionalizziamo il denominatore e troviamo quindi

$$z = \frac{86 + 82i}{353}.$$

Abbiamo quindi immediatamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{86}{353} \\ \operatorname{Im} z &= \frac{82}{353} \\ \bar{z} &= \frac{86 - 82i}{353} \end{aligned}$$

Per il calcolo di $|z|$, usiamo l'equazione (*) perché il modulo di una frazione è la frazione dei moduli. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \frac{(6+2i)(6-2i)}{(17-8i)(17+8i)} = \frac{6^2+2^2}{17^2+8^2} = \frac{40}{353} \\ |z| &= \sqrt{\frac{40}{353}} \end{aligned}$$

Esercizio 4a. Siano V_1 e V_2 i due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ così costituiti:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(a-2b+3c; 2a+5b+2c; -a+3b-2c; a-3b-2c) \mid (a;b;c) \in \mathbb{R}^3\} \\ V_2 &= \{(x;y;z;t) \mid 2x - y + 2z + t = 0\}. \end{aligned}$$

a) Determinare la dimensione di ciascuno dei 2 sottospazi vettoriali.

Lo spazio V_1 è costituito dalle combinazioni lineari dei tre vettori

$$\underline{u}_1 = (1;2;-1;1), \quad \underline{u}_2 = (-2;5;3;-3), \quad \underline{u}_3 = (3;2;-2;-2)$$

Quindi $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ è una famiglia generatrice di V_1. Possiamo calcolare la caratteristica della matrice A costituita da questi tre vettori usando il metodo di Kronecker:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

I determinanti delle 3 sottomatrici segnate sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \det A_1 &= 1 \\ \det A_2 &= 9 \\ \det A_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 13. \end{aligned}$$

Quindi i 3 vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di V_1, quindi V_1 è di dimensione 3.

Per V_2, si vede dall'equazione che $t = -2x + y - 2z$ e quindi

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x; y; z; -2x + y - 2z)\} \\ &= \{x(1; 0; 0; -2) + y(0; 1; 0; 1) + z(0; 0; 1; -2)\} \end{aligned}$$

Quindi una base di V_2 è data da

$$\underline{v}_1 = (1; 0; 0; -2), \quad \underline{v}_2 = (0; 1; 0; 1), \quad \underline{v}_3 = (0; 0; 1; -2)$$

(Il fatto che sono linearmente indipendenti è ovvio grazie alle tre prime componenti.) Quindi V_2 è di dimensione 3.

b) Dimostrare che la loro intersezione $V = V_1 \cap V_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ (non basta ricordare che l'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale: bisogna dimostrarlo).

Non dipende dai particolari V_1 e V_2 che stiamo considerando.

- Sappiamo che $\underline{0} \in V_1$ e $\underline{0} \in V_2$ per cui $\underline{0} \in V = V_1 \cap V_2$ e quindi $V \neq \emptyset$.
- Se $\underline{u}$ e $\underline{v} \in V$, allora $\underline{u} \in V_1$, $\underline{u} \in V_2$, $\underline{v} \in V_1$ e $\underline{v} \in V_2$. Dal fatto che $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono entrambi in V_1, si vede che $\underline{u} + \underline{v} \in V_1$. Nello stesso modo, $\underline{u} \in V_2$, $\underline{v} \in V_2$ e quindi $\underline{u} + \underline{v} \in V_2$. Si deduce che $\underline{u} + \underline{v} \in V_1 \cap V_2 = V$.
- Nello stesso modo sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{u} \in V$ quindi $\underline{u} \in V_1$ e $\underline{u} \in V_2$. Segue che $\lambda\underline{u} \in V_1$ da una parte e $\lambda\underline{u} \in V_2$ dall'altra, quindi $\lambda\underline{u} \in V_1 \cap V_2 = V$.

c) Determinare una base di V.

I vettori di V_1 che stanno in V_2 saranno i $(a-2b+3c; 2a+5b+2c; -a+3b-2c; a-3b-2c)$ tali che $2(a - 2b + 3c) - (2a + 5b + 2c) + 2(-a + 3b - 2c) + (a - 3b - 2c) = 0$. La condizione è quindi

$$-a - 6b - 2c = 0.$$

Possiamo quindi limitarci ai vettori di V_1 che verificano in più

$$a = -6b - 2c,$$

cioè ai vettori

$$(-8b + c; -7b - 2c; 9b; -9b - 4c)$$

ovvero

$$b\underline{w}_1 + c\underline{w}_2, \quad \text{con} \quad \underline{w}_1 = (-8; -7; 9; -9) \quad \text{e} \quad \underline{w}_2 = (1; -2; 0; -4).$$

È immediato vedere che questi due vettori sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V.

Esercizio 5a. Si considerino le rette

$$r: \quad \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x + y + 2z + 10 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

e il piano π di equazione $2x - y - z = 0$.

a) Trovare il punto d'intersezione A tra la retta r e il piano π.

Inserendo le equazioni di r in quella di π si trova $t = 1$. Quindi le coordinate di A sono $(1, 2, 0)$.

b) Trovare il punto d'intersezione B tra la retta s e il piano π.

Basta risolvere (per esempio, con il metodo di sostituzione) il sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z + 10 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Le coordinate di B risultano essere $(-2, 0, -4)$.

c) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e $C(1, 1, 1)$.

L'area cercata è la metà della norma di $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Poiché $\overrightarrow{AB} = (-3, -2, -4)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$, si ha che $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-6, 3, 3)$ e quindi l'area del triangolo vale $\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 18} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
8 luglio 2009 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'applicazione L_k, dipendente dal parametro k, definita da:

$$\begin{aligned} L_k : \mathbb{R}_1[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ a + bx &\longmapsto \begin{pmatrix} b + (k+2)ab \\ 2a - (k^2 - 4) \\ a - b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione necessaria affinché L_k sia lineare ?

L'immagine del vettore nullo, cioè quello con $a = b = 0$ deve essere il vettore nullo. L'immagine del vettore nullo è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k^2 - 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi la condizione necessaria è che $k = \pm 2$.

b) Per quali valori di k trovati al punto a) l'applicazione L_k è effettivamente lineare ?

Per i valori di k trovati al punto a), abbiamo $L_k(a + bx) = \begin{pmatrix} b + (k+2)ab \\ 2a \\ a - b \end{pmatrix}$. Il termine da eliminare è quello in ab, e ciò necessita $k = -2$. Si può arrivare a questa conclusione considerando il polinomio $P = 1 + x$ per il quale $L_k(P) = \begin{pmatrix} k+3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre $L_k(2P) = L_k(2+2x) = \begin{pmatrix} 4k+10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi $L_k(2P) = 2L_k(P)$ se e solo se $k = -2$. L'applicazione risultante è quindi

$$\begin{aligned} L = L_{-2}: \ \mathbb{R}_1[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ a + bx &\longmapsto \begin{pmatrix} b \\ 2a \\ a-b \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

L'applicazione L è "ovviamente" lineare, per primo perché è l'applicazione lineare associata alla matrice A di cui alla domanda c), ma si può anche verificare in base alla definizione, prendendo $P = a + bx$, $Q = c + dx$, λ e $\mu \in \mathbb{R}$ e verificare che

$$L(\lambda P + \mu Q) = L\big(\lambda a + \mu c + (\lambda b + \mu d)x\big) = \lambda L(P) + \mu L(Q).$$

c) Per i valori di k trovati nel punto b), determinare la matrice di L_k nelle basi canoniche

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1[x]} = \{1, x\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1\ 0\ 0)_T, (0\ 1\ 0)_T, (0\ 0\ 1)_T\}$$

L'applicazione è esplicitata sopra, la sua matrice nelle basi canoniche è immediata ed è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 7 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori e gli autovettori di A.

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I) = (5-\lambda)(\lambda-2)^2$, ossia $\lambda_1 = 5$ (autovalore semplice) e $\lambda_2 = 2$ (autovalore doppio). Gli autovettori relativi a λ_1 sono i vettori non nulli $\underline{u}_1$ tali che $(A - 5I)\underline{u}_1 = \underline{0}$. Posto

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e risolto il corrispondente sistema lineare, si trova $x = y = 0$, mentre z è arbitrario (diverso da zero). Quindi

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

con $z \neq 0$. Gli autovettori relativi a λ_2 sono invece i vettori non nulli $\underline{u}_2$ tali che $(A-2I)\underline{u}_2 = \underline{0}$. Si trova che

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} ,$$

sempre con $z \neq 0$.

b) Stabilire se A è diagonalizzabile.

Abbiamo appena visto che non è possibile formare una base di $\mathbb{R}^3$ con gli autovettori di A. Pertanto la matrice A non è diagonalizzabile. Alternativamente, si può osservare che λ_2 non è un autovalore regolare, poiché la sua molteplicità algebrica è $m_2 = 2$, mentre la sua molteplicità geometrica vale $d_2 = 3 - \operatorname{car}(A-2I) = 3-2 = 1$.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + \quad 2y - 3z = -3 \\ 4x + (k+4)y - 2z = -4 \\ 9x + \quad 3y - 5z = -7 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & k+4 & -2 \\ 9 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & k+4 & -2 \\ 9 & 5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & k+4 & -2 \\ 0 & -3-k & 0 \end{vmatrix} \\ &= (k+3) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2(k+3) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq -3$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + \quad 2y - 3z = -3 \\ 4x + \ (k+4)y - 2z = -4 \\ \quad (-3-k)y \quad = \ 0 \qquad \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq -3$), quindi $x - z = 1$ (differenza delle due prime), quindi $2x = -6$ (la seconda meno due volte $x - z = 1$), cioè $x = -3$ e quindi $z = x - 1 = -4$.

Ora, se $k = -3$, i sistemi di cui sopra rimangono equivalenti a quello iniziale. La seconda equazione dell'ultimo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Il sistema di partenza è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -3 \\ 4x + \ \ y - 2z = -4 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x+5$ (la prima meno due volte la seconda) e quindi $y = 2x+6$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x+6 \\ 3x+5 \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 4c. Considerata l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a; b; c) &\longmapsto (2a - 3b + 5c; -a + b - 3c) \end{aligned}$$

Determinare una base del nucleo e dell'immagine di f e la sua matrice nelle basi $\mathcal{B}_1 = \{\underline{v}_1 = (1; -2; -3), \underline{v}_2 = (-2; -1; 2), \underline{v}_3 = (3; 4; -1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\underline{w}_1 = (2; -1), \underline{w}_2 = (1; -1)\}$.

Il nucleo di f è l'insieme dei vettori che hanno come immagine il vettore nullo, cioè

$$\operatorname{Ker} f = \{(a; b; c) : 2a - 3b + 5c = -a + b - 3c = 0\}.$$

Possiamo eliminare facilmente a tra le due equazioni e troviamo

$$-b - c = 0$$

e quindi $c = -b$ che conduce a $a = 4b$. Abbiamo quindi

$$\operatorname{Ker} f = \{b(4; 1; -1)\}.$$

Siccome il nucleo di f è di dimensione 1, la sua immagine è di dimensione $\dim \mathbb{R}^3 - 1 = 3 - 1 = 2$. Siccome $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2, l'immagine è tutta $\mathbb{R}^2$. Quindi qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ risponde alla domanda, in particolare l'immagine dei due primi vettori della base canonica,

$$\underline{u}_1 = (2; -1) \quad \text{e} \quad \underline{u}_2 = (-3; 1).$$

Calcoliamo l'immagine dei tre vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$. Abbiamo

$$f(\underline{v}_1) = (-7; 6), \quad f(\underline{v}_2) = (9; -5) \quad \text{e} \quad f(\underline{v}_3) = (-11; 4).$$

Adesso bisogna calcolare i coefficienti di queste immagini nella base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Varie possibilità si offrono: o si ricolve i 3 sistemi $x_i\underline{w}_1 + y_i\underline{w}_2 = f(\underline{v}_i)$, o si calcola l'inversa della

matrice della base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ o si calcolano le coordinate della base canonica nella base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Scegliamo quest'ultima. Abbiamo

$$\begin{cases} \underline{w}_1 = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \\ \underline{w}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \underline{w}_1 \qquad\quad = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \\ \underline{w}_2 - \underline{w}_1 = -\underline{e}_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \underline{w}_1 - 2(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) = -\underline{e}_2 \\ \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad\qquad = \underline{e}_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \ \ = \underline{e}_1 \\ \underline{w}_1 - 2\underline{w}_2 = \underline{e}_2 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} f(\underline{v}_1) &= (-7; 6) = -7\underline{e}_1 + 6\underline{e}_2 \\ &= -7(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) + 6(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = -\underline{w}_1 - 5\underline{w}_2 \\ f(\underline{v}_2) &= (9; -5) = 9\underline{e}_1 - 5\underline{e}_2 \\ &= 9(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) - 5(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = 4\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \\ f(\underline{v}_3) &= (-11; 4) = -11\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 \\ &= -11(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) + 4(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = -7\underline{w}_1 + 3\underline{w}_2 . \end{aligned}$$

Quindi la matrice ricercata è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 5c. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$2x^2 + 4y^2 - z^2 - 4x + 16y - 6z + 9 = 0 .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

   L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

   dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix} .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y + 8 = 0 \\ -z - 3 = 0 \\ -2x + 8y - 3z + 9 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(1, -2, -3)$. Queste sono quindi le coordinate dell'unico punto doppio di σ.

b) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(1, -1, -1)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(1, -1, -1, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

ossia $2y - z + 1 = 0$.

c) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

Appello

Esercizio 3a. Data l'equazione nel campo complesso

$$z\left((-1 + 4i)^2 + 2\right) = 1 + 2i$$

determinare la forma algebrica di z, $\overline{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ e calcolare $|z|$. Attenzione: per il calcolo di $|z|$, non sono necessari conti troppo difficili.

Sviluppando il quadrato, l'equazione è equivalente a

$$z\,(-13 - 8i) = 1 + 2i$$

e quindi

$$z = \frac{1 + 2i}{-13 - 8i}. \qquad (*)$$

Razionalizziamo il denominatore e troviamo quindi

$$z = \frac{-29 - 18i}{233}.$$

Abbiamo quindi immediatamente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} z &= -\frac{29}{233} \\
\operatorname{Im} z &= -\frac{18}{233} \\
\bar{z} &= \frac{-29 + 18i}{233}
\end{aligned}$$

Per il calcolo di $|z|$, usiamo l'equazione (*) perché il modulo di una frazione è la frazione dei moduli. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= \frac{(1+2i)(1-2i)}{(-13-8i)(-13+8i)} = \frac{1^2+2^2}{13^2+8^2} = \frac{5}{233} \\
|z| &= \sqrt{\frac{5}{233}}
\end{aligned}$$

Esercizio 4a. Siano V_1 e V_2 i due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ così costituiti:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{(a - 2b + 3c; 2a + 5b + 5c; -a + 3b - 2c; a - 3b - 2c) \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\} \\
V_2 &= \{(x; y; z; t) \mid 5x - y + 5z + t = 0\}.
\end{aligned}$$

a) Determinare la dimensione di ciascuno dei 2 sottospazi vettoriali.

Lo spazio V_1 è costituito dalle combinazioni lineari dei tre vettori

$$\underline{u}_1 = (1; 2; -1; 1), \quad \underline{u}_2 = (-2; 5; 3; -3), \quad \underline{u}_3 = (3; 5; -2; -2)$$

Quindi $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ è una famiglia generatrice di V_1. Possiamo calcolare la caratteristica della matrice A costituita da questi tre vettori usando il metodo di Kronecker:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

I determinanti delle 3 sottomatrici segnate sono rispettivamente:

$$\begin{aligned}
\det A_1 &= 1 \\
\det A_2 &= 9 \\
\det A_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 10.
\end{aligned}$$

Quindi i 3 vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di V_1, quindi V_1 è di dimensione 3.

Per V_2, si vede dall'equazione che $t = -5x + y - 5z$ e quindi

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x; y; z; -5x + y - 5z)\} \\ &= \{x(1; 0; 0; -5) + y(0; 1; 0; 1) + z(0; 0; 1; -5)\} \end{aligned}$$

Quindi una base di V_2 è data da

$$\underline{v}_1 = (1; 0; 0; -5), \quad \underline{v}_2 = (0; 1; 0; 1), \quad \underline{v}_3 = (0; 0; 1; -5)$$

(Il fatto che sono linearmente indipendenti è ovvio grazie alle tre prime componenti.) Quindi V_2 è di dimensione 3.

b) Dimostrare che la loro intersezione $V = V_1 \cap V_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ (non basta ricordare che l'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale: bisogna dimostrarlo).

Non dipende dai particolari V_1 e V_2 che stiamo considerando.

- Sappiamo che $\underline{0} \in V_1$ e $\underline{0} \in V_2$ per cui $\underline{0} \in V = V_1 \cap V_2$ e quindi $V \neq \emptyset$.
- Se $\underline{u}$ e $\underline{v} \in V$, allora $\underline{u} \in V_1$, $\underline{u} \in V_2$, $\underline{v} \in V_1$ e $\underline{v} \in V_2$. Dal fatto che $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono entrambi in V_1, si vede che $\underline{u} + \underline{v} \in V_1$. Nello stesso modo, $\underline{u} \in V_2$, $\underline{v} \in V_2$ e quindi $\underline{u} + \underline{v} \in V_2$. Si deduce che $\underline{u} + \underline{v} \in V_1 \cap V_2 = V$.
- Nello stesso modo sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{u} \in V$ quindi $\underline{u} \in V_1$ e $\underline{u} \in V_2$. Segue che $\lambda\underline{u} \in V_1$ da una parte e $\lambda\underline{u} \in V_2$ dall'altra, quindi $\lambda\underline{u} \in V_1 \cap V_2 = V$.

c) Determinare una base di V.

I vettori di V_1 che stanno in V_2 saranno i $(a-2b+3c; 2a+5b+5c; -a+3b-2c; a-3b-2c)$ tali che $5(a - 2b + 3c) - (2a + 5b + 5c) + 5(-a + 3b - 2c) + (a - 3b - 2c) = 0$. La condizione è quindi

$$-a - 3b - 2c = 0.$$

Possiamo quindi limitarci ai vettori di V_1 che verificano in più

$$a = -3b - 2c,$$

cioè ai vettori

$$(-5b + c; -b + c; 6b; -6b - 4c)$$

ovvero

$$b\underline{w}_1 + c\underline{w}_2, \quad \text{con} \quad \underline{w}_1 = (-5; -1; 6; -6) \quad \text{e} \quad \underline{w}_2 = (1; 1; 0; -4).$$

È immediato vedere che questi due vettori sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V.

Esercizio 5a. Si considerino le rette

$$r: \quad \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x + y + 2z + 4 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

e il piano π di equazione $x - y - z + 1 = 0$.

a) Trovare il punto d'intersezione A tra la retta r e il piano π.

Inserendo le equazioni di r in quella di π si trova $t = 1$. Quindi le coordinate di A sono $(1, 2, 0)$.

b) Trovare il punto d'intersezione B tra la retta s e il piano π.

Basta risolvere (per esempio, con il metodo di sostituzione) il sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z + 4 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Le coordinate di B risultano essere $(-2, 0, -1)$.

c) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e $C(1, 1, 1)$.

L'area cercata è la metà della norma di $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Poiché $\overrightarrow{AB} = (-3, -2, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$, si ha che $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-3, 3, 3)$ e quindi l'area del triangolo vale $\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + 18} = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
8 luglio 2009 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'applicazione L_k, dipendente dal parametro k, definita da:

$$\begin{aligned} L_k : \mathbb{R}_1[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ a + bx &\longmapsto \begin{pmatrix} b + (k-1)ab \\ 2a - (k^2 - 1) \\ a - b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione necessaria affinché L_k sia lineare ?

L'immagine del vettore nullo, cioè quello con $a = b = 0$ deve essere il vettore nullo. L'immagine del vettore nullo è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k^2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi la condizione necessaria è che $k = \pm 1$.

b) Per quali valori di k trovati al punto a) l'applicazione L_k è effettivamente lineare ?

Per i valori di k trovati al punto a), abbiamo $L_k(a + bx) = \begin{pmatrix} b + (k-1)ab \\ 2a \\ a - b \end{pmatrix}$. Il termine da eliminare è quello in ab, e ciò necessita $k = 1$. Si può arrivare a questa conclusione considerando il polinomio $P = 1 + x$ per il quale $L_k(P) = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre

$L_k(2P) = L_k(2+2x) = \begin{pmatrix} 4k-2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi $L_k(2P) = 2L_k(P)$ se e solo se $k = 1$.
L'applicazione risultante è quindi

$$\begin{aligned} L = L_1 :\ \mathbb{R}_1[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ a + bx &\longmapsto \begin{pmatrix} b \\ 2a \\ a-b \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

L'applicazione L è "ovviamente" lineare, per primo perché è l'applicazione lineare associata alla matrice A di cui alla domanda c), ma si può anche verificare in base alla definizione, prendendo $P = a + bx$, $Q = c + dx$, λ e $\mu \in \mathbb{R}$ e verificare che

$$L(\lambda P + \mu Q) = L\big(\lambda a + \mu c + (\lambda b + \mu d)x\big) = \lambda L(P) + \mu L(Q).$$

c) Per i valori di k trovati nel punto b), determinare la matrice di L_k nelle basi canoniche

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1[x]} = \{1, x\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1\ 0\ 0)_T, (0\ 1\ 0)_T, (0\ 0\ 1)_T\}$$

L'applicazione è esplicitata sopra, la sua matrice nelle basi canoniche è immediata ed è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori e gli autovettori di A.

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(\lambda-2)^2$, ossia $\lambda_1 = 3$ (autovalore semplice) e $\lambda_2 = 2$ (autovalore doppio). Gli autovettori relativi a λ_1 sono i vettori non nulli $\underline{u}_1$ tali che $(A - 3I)\underline{u}_1 = \underline{0}$. Posto

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e risolto il corrispondente sistema lineare, si trova $x = y = 0$, mentre z è arbitrario (diverso da zero). Quindi

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

con $z \neq 0$. Gli autovettori relativi a λ_2 sono invece i vettori non nulli $\underline{u}_2$ tali che $(A - 2I)\underline{u}_2 = \underline{0}$. Si trova che

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} ,$$

sempre con $z \neq 0$.

b) Stabilire se A è diagonalizzabile.

Abbiamo appena visto che non è possibile formare una base di $\mathbb{R}^3$ con gli autovettori di A. Pertanto la matrice A non è diagonalizzabile. Alternativamente, si può osservare che λ_2 non è un autovalore regolare, poiché la sua molteplicità algebrica è $m_2 = 2$, mentre la sua molteplicità geometrica vale $d_2 = 3 - \text{car}(A - 2I) = 3 - 2 = 1$.

Seconda prova in itinere

Esercizio 3c. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -1 \\ 4x + (k+2)y - 2z = -2 \\ 9x + 3y - 5z = -3 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & k+2 & -2 \\ 9 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & k+2 & -2 \\ 9 & 5 & -5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & k+2 & -2 \\ 0 & -1-k & 0 \end{vmatrix} \\ &= (k+1) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2(k+1) \end{aligned}$$

Quindi per $k \neq -1$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -1 \\ 4x + (k+2)y - 2z = -2 \\ (-1-k)y = 0 \qquad \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq -1$), quindi $x - z = 1$ (differenza delle due prime), quindi $2x = -4$ (la seconda meno due volte $x - z = 1$), cioè $x = -2$ e quindi $z = x - 1 = -3$.

Ora, se $k = -1$, i sistemi di cui sopra rimangono equivalenti a quello iniziale. La seconda equazione dell'ultimo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Il sistema di partenza è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -1 \\ 4x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

Troviamo $z = 3x+3$ (la prima meno due volte la seconda) e quindi $y = 2x+4$. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} x \\ 2x+4 \\ 3x+3 \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 4c. Considerata l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a;b;c) &\longmapsto (2a-3b+5c; -a-2b-3c) \end{aligned}$$

Determinare una base del nucleo e dell'immagine di f e la sua matrice nelle basi $\mathcal{B}_1 = \{\underline{v}_1 = (1;-2;-3), \underline{v}_2 = (-2;-1;2), \underline{v}_3 = (3;4;-1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\underline{w}_1 = (2;-1), \underline{w}_2 = (1;-1)\}$.

Il nucleo di f è l'insieme dei vettori che hanno come immagine il vettore nullo, cioè

$$\operatorname{Ker} f = \{(a;b;c) : 2a - 3b + 5c = -a - 2b - 3c = 0\}.$$

Possiamo eliminare facilmente a tra le due equazioni e troviamo

$$-7b - c = 0$$

e quindi $c = -7b$ che conduce a $a = 19b$. Abbiamo quindi

$$\operatorname{Ker} f = \{b(19;1;-7)\}.$$

Siccome il nucleo di f è di dimensione 1, la sua immagine è di dimensione $\dim \mathbb{R}^3 - 1 = 3 - 1 = 2$. Siccome $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2, l'immagine è tutta $\mathbb{R}^2$. Quindi qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ risponde alla domanda, in particolare l'immagine dei due primi vettori della base canonica,

$$\underline{u}_1 = (2;-1) \quad \text{e} \quad \underline{u}_2 = (-3;-2).$$

Calcoliamo l'immagine dei tre vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$. Abbiamo

$$f(\underline{v}_1) = (-7;12), \quad f(\underline{v}_2) = (9;-2) \quad \text{e} \quad f(\underline{v}_3) = (-11;-8).$$

Adesso bisogna calcolare i coefficienti di queste immagini nella base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Varie possibilità si offrono: o si ricolve i 3 sistemi $x_i\underline{w}_1 + y_i\underline{w}_2 = f(\underline{v}_i)$, o si calcola l'inversa della

matrice della base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ o si calcolano le coordinate della base canonica nella base $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Scegliamo quest'ultima. Abbiamo

$$\begin{cases} \underline{w}_1 = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \\ \underline{w}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{w}_1 \phantom{- \underline{w}_1} = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \\ \underline{w}_2 - \underline{w}_1 = -\underline{e}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{w}_1 - 2(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) = -\underline{e}_2 \\ \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \phantom{- 2(\underline{w}_1)} = \underline{e}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{w}_1 - \underline{w}_2 = \underline{e}_1 \\ \underline{w}_1 - 2\underline{w}_2 = \underline{e}_2 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} f(\underline{v}_1) &= (-7; 12) = -7\underline{e}_1 + 12\underline{e}_2 \\ &= -7(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) + 12(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = 5\underline{w}_1 - 17\underline{w}_2 \\ f(\underline{v}_2) &= (9; -2) = 9\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 \\ &= 9(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) - 2(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = 7\underline{w}_1 - 5\underline{w}_2 \\ f(\underline{v}_3) &= (-11; -8) = -11\underline{e}_1 - 8\underline{e}_2 \\ &= -11(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) - 8(\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2) = -19\underline{w}_1 + 27\underline{w}_2. \end{aligned}$$

Quindi la matrice ricercata è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -19 \\ -17 & -5 & 27 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5c. Si consideri la quadrica σ di equazione

$$2x^2 + 4y^2 - z^2 - 4x + 16y - 2z + 17 = 0 \ .$$

a) Determinare gli eventuali punti doppi di σ.

L'equazione di σ in forma matriciale è

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 8 & -1 & 17 \end{pmatrix} \ .$$

I punti doppi di σ sono pertanto determinati dalla condizione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia dal sistema

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y + 8 = 0 \\ -z - 1 = 0 \\ -2x + 8y - z + 17 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(1, -2, -1)$. Queste sono quindi le coordinate dell'unico punto doppio di σ.

b) Scrivere l'equazione del piano tangente a σ nel suo punto $(1, -1, 1)$.

Il piano cercato ha equazione

$$(1, -1, 1, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

ossia $2y - z + 3 = 0$.

c) Riconoscere la quadrica σ.

Poiché σ ha un unico punto doppio, essa è un cono (il cui vertice è proprio il punto doppio).

Appello

Esercizio 3a. Data l'equazione nel campo complesso

$$z\left((1 + 2i)^2 + 2\right) = 3 + 2i$$

determinare la forma algebrica di z, $\overline{z}$, $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ e calcolare $|z|$.

Sviluppando il quadrato, l'equazione è equivalente a

$$z\,(-1 + 4i) = 3 + 2i$$

e quindi

(*) $$z = \frac{3 + 2i}{-1 + 4i}.$$

Razionalizziamo il denominatore e troviamo quindi

$$z = \frac{5 - 14i}{17}.$$

Abbiamo quindi immediatamente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} z &= \frac{5}{17} \\
\operatorname{Im} z &= -\frac{14}{17} \\
\bar{z} &= \frac{5 + 14i}{17}
\end{aligned}$$

Per il calcolo di $|z|$, usiamo l'equazione (*) perché il modulo di una frazione è la frazione dei moduli. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= \frac{(3+2i)(3-2i)}{(-1+4i)(-1-4i)} = \frac{3^2+2^2}{1^2+4^2} = \frac{13}{17} \\
|z| &= \sqrt{\frac{13}{17}}
\end{aligned}$$

Esercizio 4a. Siano V_1 e V_2 i due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ così costituiti:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{(a - 2b + 3c; 2a + 5b + 4c; -a + 3b - 2c; a - 3b - 2c) \mid (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\} \\
V_2 &= \{(x; y; z; t) \mid 4x - y + 4z + t = 0\}.
\end{aligned}$$

a) Determinare la dimensione di ciascuno dei 2 sottospazi vettoriali.

Lo spazio V_1 è costituito dalle combinazioni lineari dei tre vettori

$$\underline{u}_1 = (1; 2; -1; 1), \quad \underline{u}_2 = (-2; 5; 3; -3), \quad \underline{u}_3 = (3; 4; -2; -2)$$

Quindi $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ è una famiglia generatrice di V_1. Possiamo calcolare la caratteristica della matrice A costituita da questi tre vettori usando il metodo di Kronecker:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

I determinanti delle 3 sottomatrici segnate sono rispettivamente:

$$\begin{aligned}
\det A_1 &= 1 \\
\det A_2 &= 9 \\
\det A_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 11.
\end{aligned}$$

Quindi i 3 vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di V_1, quindi V_1 è di dimensione 3.

Per V_2, si vede dall'equazione che $t = -4x + y - 4z$ e quindi

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x; y; z; -4x + y - 4z)\} \\ &= \{x(1; 0; 0; -4) + y(0; 1; 0; 1) + z(0; 0; 1; -4)\} \end{aligned}$$

Quindi una base di V_2 è data da

$$\underline{v}_1 = (1; 0; 0; -4), \quad \underline{v}_2 = (0; 1; 0; 1), \quad \underline{v}_3 = (0; 0; 1; -4)$$

(Il fatto che sono linearmente indipendenti è ovvio grazie alle tre prime componenti.) Quindi V_2 è di dimensione 3.

b) Dimostrare che la loro intersezione $V = V_1 \cap V_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ (non basta ricordare che l'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale: bisogna dimostrarlo).

Non dipende dai particolari V_1 e V_2 che stiamo considerando.

- Sappiamo che $\underline{0} \in V_1$ e $\underline{0} \in V_2$ per cui $\underline{0} \in V = V_1 \cap V_2$ e quindi $V \neq \emptyset$.
- Se $\underline{u}$ e $\underline{v} \in V$, allora $\underline{u} \in V_1$, $\underline{u} \in V_2$, $\underline{v} \in V_1$ e $\underline{v} \in V_2$. Dal fatto che $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono entrambi in V_1, si vede che $\underline{u} + \underline{v} \in V_1$. Nello stesso modo, $\underline{u} \in V_2$, $\underline{v} \in V_2$ e quindi $\underline{u} + \underline{v} \in V_2$. Si deduce che $\underline{u} + \underline{v} \in V_1 \cap V_2 = V$.
- Nello stesso modo sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{u} \in V$ quindi $\underline{u} \in V_1$ e $\underline{u} \in V_2$. Segue che $\lambda\underline{u} \in V_1$ da una parte e $\lambda\underline{u} \in V_2$ dall'altra, quindi $\lambda\underline{u} \in V_1 \cap V_2 = V$.

c) Determinare una base di V.

I vettori di V_1 che stanno in V_2 saranno i $(a-2b+3c; 2a+5b+4c; -a+3b-2c; a-3b-2c)$ tali che $4(a - 2b + 3c) - (2a + 5b + 4c) + 4(-a + 3b - 2c) + (a - 3b - 2c) = 0$. La condizione è quindi

$$-a - 4b - 2c = 0.$$

Possiamo quindi limitarci ai vettori di V_1 che verificano in più

$$a = -4b - 2c,$$

cioè ai vettori

$$(-6b + c; -3b; 7b; -7b - 4c)$$

ovvero

$$b\underline{w}_1 + c\underline{w}_2, \quad \text{con} \quad \underline{w}_1 = (-6; -3; 7; -7) \quad \text{e} \quad \underline{w}_2 = (1; 0; 0; -4).$$

È immediato vedere che questi due vettori sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V.

Esercizio 5a. Si considerino le rette

$$r: \quad \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x + y + 2z + 6 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

e il piano π di equazione $4x - 3y - 3z + 2 = 0$.

a) Trovare il punto d'intersezione A tra la retta r e il piano π.

Inserendo le equazioni di r in quella di π si trova $t = 1$. Quindi le coordinate di A sono $(1, 2, 0)$.

b) Trovare il punto d'intersezione B tra la retta s e il piano π.

Basta risolvere (per esempio, con il metodo di sostituzione) il sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z + 6 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \\ 4x - 3y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

Le coordinate di B risultano essere $(-2, 0, -2)$.

c) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e $C(1, 1, 1)$.

L'area cercata è la metà della norma di $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Poiché $\overrightarrow{AB} = (-3, -2, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$, si ha che $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-4, 3, 3)$ e quindi l'area del triangolo vale $\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 18} = \frac{\sqrt{34}}{2}$.