Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
24 giugno 2009 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a_2x^2 + a_1x + a_0 &\longmapsto (2a_2 + 2a_1; a_0 - 3a_1) \end{aligned}$$

a) Verificare che f è un'applicazione lineare.

Si tratta solo di verificare se, dati due polinomi P e Q e uno scalare λ vale

$$\begin{aligned} f(P+Q) &= f(P) + f(Q) \\ f(\lambda P) &= \lambda f(P) \end{aligned}$$

È molto facile vedere che questo è vero.

b) Dire se f può essere iniettiva.

No, non lo può essere perché $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3 (una sua base è data da $(1, x, x^2)$) mentre $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2. Il teorema delle dimensioni dice quindi che $\operatorname{Ker} f$ deve avere almeno dimensione 1.

c) Determinare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(P) = \underline{0}\} \\ &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid 2a_2 + 2a_1 = 0, a_0 - 3a_1 = 0\} \\ &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 = -a_1, a_0 = 3a_1\} \\ &= \left\{-a_1x^2 + a_1x + 3a_1\right\} \\ &= \left\{a_1\left(-x^2 + x + 3\right)\right\} \end{aligned}$$

Quindi $-x^2+x+3$ è un vettore generatore di $\operatorname{Ker} f$; forma una famiglia libera (perché non è il vettore nullo); quindi è una base di $\operatorname{Ker} f$.

Dalla formula delle dimensioni, possiamo determinare che la dimensione di $\operatorname{Im} f$ è $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$. Quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ e qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ conviene. Possiamo prendere quindi la base canonica $\underline{e}_1 = (1;0)$, $\underline{e}_2 = (0;1)$.

Altra soluzione per determinare la base di $\operatorname{Im} f$: i vettori nell'immagine sono gli

$$\begin{aligned}(2a_2 + 2a_1; a_0 - 3a_1) &= (2a_2; 0) + (2a_1; -3a_1) + (0; a_0)\\ &= a_2(2;0) + a_1(2;-3) + a_0(0;1)\end{aligned}$$

Quindi una famiglia generatrice di $\operatorname{Im} f$ è data da $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ con $\underline{v}_1 = (2;0)$, $\underline{v}_2 = (2;-3)$ e $\underline{v}_3 = (0;1)$. Abbiamo chiaramente $\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + 3\underline{v}_3$ quindi tale famiglia non è libera. Invece la famiglia $(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$ è chiaramente libera e rimane generatrice. Quindi una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$. Osservazione: si può sostituire ovviamente $(1;0)$ al posto di $\underline{v}_1$.

Esercizio 2. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1\\ x + ky - z = 7\\ x - y + 2z = -2\end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & k & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & k & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & k+2 & 0\\ -1 & -5 & 0\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} 2 & k+2\\ -1 & -5\end{vmatrix}\\ &= k-8\end{aligned}$$

Quindi per $k \neq 8$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente ai seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 & \\ 2x + (k+2)y = 8 & \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_1\\ -x - 5y = -4 & \mathrm{R}_3 - 2R_1\end{cases}$$

$$\begin{cases} x + & 2y + z = & 1 \\ & (k-8)y & = & 0 \qquad \mathrm{R}_2 - 2R_3 \\ -x - & 5y & = -4 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq 8$), quindi $x = 4$ (nella terza) e quindi $z = -3$ (nella prima). Ora, se $k = 8$, i sistemi di cui sopra rimangono equivalenti a quello iniziale. La seconda equazione dell'ultimo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} 4-5y \\ y \\ -3+3y \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k+2 & -2k & 2k-2 \\ -2k-2 & 2k+3 & -2k-4 \\ -k-1 & k & -k+1 \end{pmatrix}$$

a) Per quale valore di k la matrice ammette 1 come autovalore?

Basta imporre che $\det(A-I) = 0$. Poiché tale determinante vale $-4-6k$ (si suggerisce di aggiungere la seconda colonna alla prima e alla terza prima di svolgere il resto del calcolo del determinante), il valore cercato è $k = -\frac{2}{3}$.

b) Per il valore di k determinato nel punto precedente, dire se la matrice A è diagonalizzabile.

Per $k = -\frac{2}{3}$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

e i suoi autovalori sono 0, 1, 3. Essendo tali autovalori reali e distinti, la matrice è diagonalizzabile. (Si poteva per semplicità considerare la matrice $3A$ e mostrare che essa è diagonalizzabile.)

Seconda prova in itinere

Esercizio 4. Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

a) $$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (2+3i)z - (4-2i)\overline{z} \end{aligned}$$

Se z e $z' \in \mathbb{C}$, sappiamo che $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ per cui $f_1(z+z') = (2+3i)(z+z') - (4-2i)\left(\overline{z+z'}\right) = (2+3i)z + (2+3i)z' - (4-2i)\left(\overline{z} + \overline{z'}\right) = (2+3i)z + (2+3i)z' - (4-2i)\overline{z} + (4-2i)\overline{z'} = f_1(z) + f_1(z')$. D'altra parte, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z} = \lambda \overline{z}$ perché siccome $\lambda \in \mathbb{R}$, vale $\overline{\lambda} = \lambda$. Quindi $f_1(\lambda z) = (2+3i) \cdot (\lambda z) - (4-2i)\overline{\lambda z} = \lambda(2+3i)z - (4-2i)\lambda\overline{z} = \lambda f_1(z)$. Quindi f_1 è lineare.

b) $$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P(x) &\longmapsto \int_1^3 \big(P(t)\big)^3 \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

L'applicazione f_2 non è lineare. La presenza del cubo impedisce la linearità. Consideriamo $\lambda = 2$ e $P(x) = 1$ (il polinomio costante uguale a 1). Allora $f_2(P) = \int_1^3 1^2 \,\mathrm{d}t = [t]_1^3 = 2$ mentre $f_2(\lambda P) = \int_1^3 2^2 \,\mathrm{d}t = 8 \int_1^3 \,\mathrm{d}t = 16 \neq 4 = \lambda f_2(P)$.

c) Determinare se la seguente applicazione è lineare e, nel caso affermativo, la sua matrice rappresentativa rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ di $\mathbb{R}^2$, dove $\underline{v}_1 = (3; 2)$ e $\underline{v}_2 = (1; 1)$.

$$\begin{aligned} f_3 : \quad \mathbb{R}^3 \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y; z) &\longmapsto (2x - 2y + 2z; -2x + 3y + z) \end{aligned}$$

L'applicazione è lineare. Si tratta di verificare se, dati $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$, $(x'; y'; z') \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono

$$\begin{aligned} f_3((x; y; z) + (x'; y'; z')) &= f_3(x; y; z) + f_3(x'; y'; z') \\ f_3(\lambda(x; y; z)) &= \lambda f_3(x; y; z). \end{aligned}$$

Si può verificare senza difficoltà, oppure osservare che f_3 è l'applicazione lineare associata ad una matrice di tipo $(2, 3)$.

Calcoliamo

$$\begin{aligned} f_3(1; 0; 0) &= (2; -2) \\ f_3(0; 1; 0) &= (-2; 3) \\ f_3(0; 0; 1) &= (2; 1) \end{aligned}$$

Dobbiamo risolvere i tre sistemi

$$\begin{aligned} x_1\underline{v}_1 + y_1\underline{v}_2 = (2; -2) &\iff \begin{cases} 3x_1 + y_1 = 2 \\ 2x_1 + y_1 = -2 \end{cases} \\ x_2\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2 = (-2; 3) &\iff \begin{cases} 3x_2 + y_2 = -2 \\ 2x_2 + y_2 = 3 \end{cases} \\ x_3\underline{v}_1 + y_3\underline{v}_2 = (2; 1) &\iff \begin{cases} 3x_3 + y_3 = 2 \\ 2x_3 + y_3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si trova senza difficoltà $x_1 = 4$, $y_1 = -10$, $x_2 = -5$, $y_2 = 13$, $x_3 = 1$, $y_3 = -1$. Quindi la matrice chiesta è

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -10 & 13 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Determinare l'asse e il vertice della parabola di equazione

$$x^2 + 2xy + y^2 - 7x - 9y + 15 = 0\ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2xy$, ossia diagonalizzare la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $2(x')^2 - 8\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 15 = 0$, ossia $(x' - 2\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + \frac{1}{\sqrt{2}})$. Quindi il vertice della parabola ha coordinate $x'_V = 2\sqrt{2}$, $y'_V = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Le sue coordinate nel sistema di riferimento originale sono date da

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_V - y'_V) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_V + y'_V) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

L'asse della parabola è infine la retta parallela all'asse y' (ossia, alla bisettrice $y + x = 0$) e passante per il vertice, ossia la retta $y + x = 4$.

Appello

Esercizio 4. Calcolare la parte reale, la parte immaginaria e le radici quadrate del numero complesso $z = \dfrac{2+i}{7+i} - \dfrac{1-8i}{5+5i}$.

Si moltiplica numeratore e denominatore della prima frazione per $7 - i$ e numeratore e denominatore della seconda per $5 - 5i$ (oss: sarebbe stato possibile usare $1 - i$, ma in questo caso $7^2 + 1^2 = 50 = 5^2 + 5^2$ quindi era più comodo usare $5 - 5i$). Si trova

$$z = 1 + i.$$

Le radici quadrate di z sono i complessi

$$w = x + iy$$

tali che $x^2 - y^2 + 2ixy = z$, cioè

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy \qquad = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Abbiamo quindi $x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, cioè $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ e $y = \frac{1}{2x}$.
Osservazione: $\frac{2}{1+\sqrt{2}} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$ quindi l'espressione di y si può semplificare.

Esercizio 5. a) Trovare il piano π contenente la retta

$$r: \quad \begin{cases} 3x - y + 3z - 14 = 0 \\ x - y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

e passante per il punto $P(1, 0, 7)$.

Consideriamo il fascio di piani contenenti r, ossia $\lambda(3x-y+3z-14)+\mu(x-y-z-4) = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P si trova $\lambda = \mu$ e quindi l'equazione di π è $2x - y + z - 9 = 0$.

b) Determinare un piano parallelo a π e distante 2 da esso.

Conviene cercare un punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ che disti 2 dal piano π. Deve essere

$$\frac{|2x_0 - y_0 + z_0 - 9|}{\sqrt{1^2 + 5}} = \frac{|2x_0 - y_0 + z_0 - 9|}{\sqrt{6}} = 2$$

e quindi si può scegliere $x_0 = \sqrt{6}$, $y_0 = 0$ e $z_0 = 9$. Pertanto il piano π' passante per $Q(\sqrt{6}, 0, 9)$ e parallelo a π dista 2 da π. La sua equazione è $2x - y + z - 9 - 2\sqrt{6} = 0$. L'altra possibilità è fornita dal piano che è simmetrico a π' rispetto a π, ossia $2x - y + z - 9 + 2\sqrt{6} = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
24 giugno 2009 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a_2x^2 + a_1x + a_0 &\longmapsto (2a_2 + 3a_1; a_0 - 3a_1) \end{aligned}$$

a) Verificare che f è un'applicazione lineare.

Si tratta solo di verificare se, dati due polinomi P e Q e uno scalare λ vale

$$\begin{aligned} f(P+Q) &= f(P) + f(Q) \\ f(\lambda P) &= \lambda f(P) \end{aligned}$$

È molto facile vedere che questo è vero.

b) Dire se f può essere iniettiva.

No, non lo può essere perché $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3 (una sua base è data da $(1, x, x^2)$) mentre $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2. Il teorema delle dimensioni dice quindi che $\operatorname{Ker} f$ deve avere almeno dimensione 1.

c) Determinare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(P) = \underline{0}\} \\ &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid 2a_2 + 3a_1 = 0, a_0 - 3a_1 = 0\} \\ &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 = -\frac{3}{2}a_1, a_0 = 3a_1\} \\ &= \left\{-\frac{3}{2}a_1x^2 + a_1x + 3a_1\right\} \\ &= \left\{a_1\left(-\frac{3}{2}x^2 + x + 3\right)\right\} \end{aligned}$$

Quindi $-\frac{3}{2}x^2 + x + 3$ è un vettore generatore di $\operatorname{Ker} f$; forma una famiglia libera (perché non è il vettore nullo); quindi è una base di $\operatorname{Ker} f$.

Dalla formula delle dimensioni, possiamo determinare che la dimensione di $\operatorname{Im} f$ è $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$. Quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ e qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ conviene. Possiamo prendere quindi la base canonica $\underline{e}_1 = (1; 0)$, $\underline{e}_2 = (0; 1)$.

Altra soluzione per determinare la base di $\operatorname{Im} f$: i vettori nell'immagine sono gli

$$\begin{aligned}(2a_2 + 3a_1; a_0 - 3a_1) &= (2a_2; 0) + (3a_1; -3a_1) + (0; a_0)\\ &= a_2(2; 0) + a_1(3; -3) + a_0(0; 1)\end{aligned}$$

Quindi una famiglia generatrice di $\operatorname{Im} f$ è data da $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ con $\underline{v}_1 = (2; 0)$, $\underline{v}_2 = (3; -3)$ e $\underline{v}_3 = (0; 1)$. Abbiamo chiaramente $\underline{v}_2 = \frac{3}{2}\underline{v}_1 + 3\underline{v}_3$ quindi tale famiglia non è libera. Invece la famiglia $(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$ è chiaramente libera e rimane generatrice. Quindi una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$. Osservazione: si può sostituire ovviamente $(1; 0)$ al posto di $\underline{v}_1$.

Esercizio 2. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + ky - z = 15 \\ 5x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & k+2 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} 4 & k+2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}\\ &= k - 18\end{aligned}$$

Quindi per $k \neq 18$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente ai seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 & \\ 4x + (k+2)y = 16 & \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_1 \\ -x - 5y = -4 & \mathrm{R}_3 - 2R_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + \quad 2y + z = 1 \\ \quad (k-18)y \quad = 0 \qquad \mathrm{R}_2 - 2R_3 \\ -x - \quad 5y \quad = -4 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq 18$), quindi $x = 4$ (nella terza) e quindi $z = -11$ (nella prima). Ora, se $k = 18$, i sistemi di cui sopra rimangono equivalenti a quello iniziale. La seconda equazione dell'ultimo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} 4-5y \\ y \\ -11+13y \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k+4 & -2k-2 & 2k \\ -2k-4 & 2k+5 & -2k-6 \\ -k-2 & k+1 & -k \end{pmatrix}$$

a) Per quale valore di k la matrice ammette 1 come autovalore?

Basta imporre che $\det(A - I) = 0$. Poiché tale determinante vale $-10 - 6k$ (si suggerisce di aggiungere la seconda colonna alla prima e alla terza prima di svolgere il resto del calcolo del determinante), il valore cercato è $k = -\frac{5}{3}$.

b) Per il valore di k determinato nel punto precedente, dire se la matrice A è diagonalizzabile.

Per $k = -\frac{5}{3}$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

e i suoi autovalori sono 0, 1, 3. Essendo tali autovalori reali e distinti, la matrice è diagonalizzabile. (Si poteva per semplicità considerare la matrice $3A$ e mostrare che essa è diagonalizzabile.)

Seconda prova in itinere

Esercizio 4. Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

a) $\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P(x) &\longmapsto \int_1^3 P(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$

Siano P e Q due polinomi. Allora $f_1(P+Q) = \int_1^3 (P(t)+Q(t))\,\mathrm{d}t = \int_1^3 P(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^3 Q(t)\,\mathrm{d}t = f_1(P) + f_1(Q)$. Sia $P \in \mathbb{R}[x]$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $f_1(\lambda P) = \int_1^3 \lambda P(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_1^3 P(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f_1(P)$. Quindi f_1 è lineare.

b) $$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (-2+i)z^2 - (1+5i)\overline{z} \end{aligned}$$

L'applicazione f_2 non è lineare. La presenza del quadrato impedisce la linearità. Consideriamo $\lambda = -1$ e $z = 1$. Allora $f_2(z) = -2+i-1-5i = -3-4i$ mentre $f_2(\lambda z) = (-2+i)(-1)^2 - (1+5i)\overline{(-1)} = -2+i+1+5i = -1+6i \neq 3+4i = \lambda f_2(z)$.

c) Determinare se la seguente applicazione è lineare e, nel caso affermativo, la sua matrice rappresentativa rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ di $\mathbb{R}^2$, dove $\underline{v}_1 = (3;2)$ e $\underline{v}_2 = (1;1)$.

$$\begin{aligned} f_3 : \quad \mathbb{R}^3 \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y;z) &\longmapsto (2x+7y+2z; -2x+3y+z) \end{aligned}$$

L'applicazione è lineare. Si tratta di verificare se, dati $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$, $(x';y';z') \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono

$$\begin{aligned} f_3((x;y;z) + (x';y';z')) &= f_3(x;y;z) + f_3(x';y';z') \\ f_3(\lambda(x;y;z)) &= \lambda f_3(x;y;z). \end{aligned}$$

Si può verificare senza difficoltà, oppure osservare che f_3 è l'applicazione lineare associata ad una matrice di tipo $(2,3)$.

Calcoliamo

$$\begin{aligned} f_3(1;0;0) &= (2;-2) \\ f_3(0;1;0) &= (7;3) \\ f_3(0;0;1) &= (2;1) \end{aligned}$$

Dobbiamo risolvere i tre sistemi

$$\begin{aligned} x_1\underline{v}_1 + y_1\underline{v}_2 = (2;-2) &\iff \begin{cases} 3x_1 + y_1 = 2 \\ 2x_1 + y_1 = -2 \end{cases} \\ x_2\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2 = (7;3) &\iff \begin{cases} 3x_2 + y_2 = 7 \\ 2x_2 + y_2 = 3 \end{cases} \\ x_3\underline{v}_1 + y_3\underline{v}_2 = (2;1) &\iff \begin{cases} 3x_3 + y_3 = 2 \\ 2x_3 + y_3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si trova senza difficoltà $x_1 = 4$, $y_1 = -10$, $x_2 = 4$, $y_2 = -5$, $x_3 = 1$, $y_3 = -1$. Quindi la matrice chiesta è

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -10 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Determinare l'asse e il vertice della parabola di equazione

$$x^2 + 2xy + y^2 - 7x - 9y + 21 = 0 \ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2xy$, ossia diagonalizzare la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $2(x')^2 - 8\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 21 = 0$, ossia $(x' - 2\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - \frac{5}{\sqrt{2}})$. Quindi il vertice della parabola ha coordinate $x'_V = 2\sqrt{2}$, $y'_V = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Le sue coordinate nel sistema di riferimento originale sono date da

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_V - y'_V) = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_V + y'_V) = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

L'asse della parabola è infine la retta parallela all'asse y' (ossia, alla bisettrice $y + x = 0$) e passante per il vertice, ossia la retta $y + x = 4$.

Appello

Esercizio 4. Calcolare la parte reale, la parte immaginaria e le radici quadrate del numero complesso $z = \dfrac{-23 + i}{7 + i} - \dfrac{6 + 2i}{5 + 5i}$. Si segnala che $23 \cdot 7 = 161$.

Si moltiplica numeratore e denominatore della prima frazione per $7 - i$ e numeratore e denominatore della seconda per $5 - 5i$ (oss: sarebbe stato possibile usare $1 - i$, ma in questo caso $7^2 + 1^2 = 50 = 5^2 + 5^2$ quindi era più comodo usare $5 - 5i$). Si trova

$$z = -4 + i.$$

Le radici quadrate di z sono i complessi

$$w = x + iy$$

tali che $x^2 - y^2 + 2ixy = z$, cioè

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -4 \\ 2xy \quad\;\; = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{17} \end{cases}$$

Abbiamo quindi $x^2 = \frac{-4+\sqrt{17}}{2}$, cioè $x = \pm\sqrt{\frac{-4+\sqrt{17}}{2}}$ e $y = \frac{1}{2x}$.
Osservazione: $\frac{2}{-4+\sqrt{17}} = 2\left(\sqrt{17} + 4\right)$ quindi l'espressione di y si può semplificare.

Esercizio 5. a) Trovare il piano π contenente la retta

$$r: \quad \begin{cases} 3x - 4y + 3z - 14 = 0 \\ x - 4y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

e passante per il punto $P(1, 0, 7)$.

Consideriamo il fascio di piani contenenti r, ossia $\lambda(3x - 4y + 3z - 14) + \mu(x - 4y - z - 4) = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P si trova $\lambda = \mu$ e quindi l'equazione di π è $2x - 4y + z - 9 = 0$.

b) Determinare un piano parallelo a π e distante 2 da esso.

Conviene cercare un punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ che disti 2 dal piano π. Deve essere

$$\frac{|2x_0 - 4y_0 + z_0 - 9|}{\sqrt{4^2 + 5}} = \frac{|2x_0 - 4y_0 + z_0 - 9|}{\sqrt{21}} = 2$$

e quindi si può scegliere $x_0 = \sqrt{21}$, $y_0 = 0$ e $z_0 = 9$. Pertanto il piano π' passante per $Q(\sqrt{21}, 0, 9)$ e parallelo a π dista 2 da π. La sua equazione è $2x - 4y + z - 9 - 2\sqrt{21} = 0$. L'altra possibilità è fornita dal piano che è simmetrico a π' rispetto a π, ossia $2x - 4y + z - 9 + 2\sqrt{21} = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
24 giugno 2009 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a_2x^2 + a_1x + a_0 &\longmapsto (2a_2 + 4a_1; a_0 - 3a_1) \end{aligned}$$

a) Verificare che f è un'applicazione lineare.

Si tratta solo di verificare se, dati due polinomi P e Q e uno scalare λ vale

$$\begin{aligned} f(P+Q) &= f(P) + f(Q) \\ f(\lambda P) &= \lambda f(P) \end{aligned}$$

È molto facile vedere che questo è vero.

b) Dire se f può essere iniettiva.

No, non lo può essere perché $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3 (una sua base è data da $(1, x, x^2)$) mentre $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2. Il teorema delle dimensioni dice quindi che $\operatorname{Ker} f$ deve avere almeno dimensione 1.

c) Determinare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(P) = \underline{0}\} \\ &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid 2a_2 + 4a_1 = 0, a_0 - 3a_1 = 0\} \\ &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 = -2a_1, a_0 = 3a_1\} \\ &= \left\{-2a_1x^2 + a_1x + 3a_1\right\} \\ &= \left\{a_1\left(-2x^2 + x + 3\right)\right\} \end{aligned}$$

Quindi $-2x^2 + x + 3$ è un vettore generatore di $\operatorname{Ker} f$; forma una famiglia libera (perché non è il vettore nullo); quindi è una base di $\operatorname{Ker} f$.

Dalla formula delle dimensioni, possiamo determinare che la dimensione di $\operatorname{Im} f$ è $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$. Quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ e qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ conviene. Possiamo prendere quindi la base canonica $\underline{e}_1 = (1; 0)$, $\underline{e}_2 = (0; 1)$.

Altra soluzione per determinare la base di $\operatorname{Im} f$: i vettori nell'immagine sono gli

$$\begin{aligned}(2a_2 + 4a_1; a_0 - 3a_1) &= (2a_2; 0) + (4a_1; -3a_1) + (0; a_0) \\ &= a_2(2; 0) + a_1(4; -3) + a_0(0; 1)\end{aligned}$$

Quindi una famiglia generatrice di $\operatorname{Im} f$ è data da $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ con $\underline{v}_1 = (2; 0)$, $\underline{v}_2 = (4; -3)$ e $\underline{v}_3 = (0; 1)$. Abbiamo chiaramente $\underline{v}_2 = 2\underline{v}_1 + 3\underline{v}_3$ quindi tale famiglia non è libera. Invece la famiglia $(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$ è chiaramente libera e rimane generatrice. Quindi una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$. Osservazione: si può sostituire ovviamente $(1; 0)$ al posto di $\underline{v}_1$.

Esercizio 2. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 1 \\ x + ky - z = -9 \\ -7x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ -7 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & k+2 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & k+2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= k + 12\end{aligned}$$

Quindi per $k \neq -12$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente ai seguenti sistemi:

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 1 & \\ -2x + (k+2)y = -8 & \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_1 \\ {-x} - 5y = -4 & \mathrm{R}_3 - 2R_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + \quad 2y + z = 1 \\ \quad (k+12)y \quad = 0 \qquad \mathrm{R}_2 - 2R_3 \\ -x - \quad 5y \quad = -4 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq -12$), quindi $x = 4$ (nella terza) e quindi $z = 13$ (nella prima). Ora, se $k = -12$, i sistemi di cui sopra rimangono equivalenti a quello iniziale. La seconda equazione dell'ultimo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} 4-5y \\ y \\ 13-17y \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k-2 & -2k+4 & 2k-6 \\ -2k+2 & 2k-1 & -2k \\ -k+1 & k-2 & -k+3 \end{pmatrix}$$

a) Per quale valore di k la matrice ammette 1 come autovalore?

Basta imporre che $\det(A-I) = 0$. Poiché tale determinante vale $8-6k$ (si suggerisce di aggiungere la seconda colonna alla prima e alla terza prima di svolgere il resto del calcolo del determinante), il valore cercato è $k = \frac{4}{3}$.

b) Per il valore di k determinato nel punto precedente, dire se la matrice A è diagonalizzabile.

Per $k = \frac{4}{3}$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

e i suoi autovalori sono 0, 1, 3. Essendo tali autovalori reali e distinti, la matrice è diagonalizzabile. (Si poteva per semplicità considerare la matrice $3A$ e mostrare che essa è diagonalizzabile.)

Seconda prova in itinere

Esercizio 4. Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

a) $$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (2-5i)z + (3-4i)|z| \end{aligned}$$

L'applicazione f_1 non è lineare. La presenza del modulo impedisce la linearità. Consideriamo $\lambda = -1$ e $z = 1$ allora $f_1(z) = f_1(1) = 2 - 5i + 3 - 4i = 5 - 9i$ mentre $f_1(\lambda z) = -2 + 5i + 3 - 4i = 1 + i \neq -5 + 9i = \lambda f_1(1)$.

b) $$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P(x) &\longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Siano P e Q due polinomi. Allora $f_2(P+Q) = \int_{-1}^{1}(P(t)+Q(t))\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = f_2(P)+f_2(Q)$. Sia $P \in \mathbb{R}[x]$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $f_2(\lambda P) = \int_{-1}^{1} \lambda P(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f_2(P)$. Quindi f_2 è lineare.

c) Determinare se la seguente applicazione è lineare e, nel caso affermativo, la sua matrice rappresentativa rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ di $\mathbb{R}^2$, dove $\underline{v}_1 = (3; 2)$ e $\underline{v}_2 = (1; 1)$.

$$\begin{aligned} f_3 : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y; z) &\longmapsto (2x + 4y + 2z; -2x + 3y + z) \end{aligned}$$

L'applicazione è lineare. Si tratta di verificare se, dati $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$, $(x'; y'; z') \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono

$$f_3((x; y; z) + (x'; y'; z')) = f_3(x; y; z) + f_3(x'; y'; z')$$
$$f_3(\lambda(x; y; z)) = \lambda f_3(x; y; z).$$

Si può verificare senza difficoltà, oppure osservare che f_3 è l'applicazione lineare associata ad una matrice di tipo $(2, 3)$.

Calcoliamo

$$\begin{aligned} f_3(1; 0; 0) &= (2; -2) \\ f_3(0; 1; 0) &= (4; 3) \\ f_3(0; 0; 1) &= (2; 1) \end{aligned}$$

Dobbiamo risolvere i tre sistemi

$$\begin{aligned} x_1\underline{v}_1 + y_1\underline{v}_2 = (2; -2) &\iff \begin{cases} 3x_1 + y_1 = 2 \\ 2x_1 + y_1 = -2 \end{cases} \\ x_2\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2 = (4; 3) &\iff \begin{cases} 3x_2 + y_2 = 4 \\ 2x_2 + y_2 = 3 \end{cases} \\ x_3\underline{v}_1 + y_3\underline{v}_2 = (2; 1) &\iff \begin{cases} 3x_3 + y_3 = 2 \\ 2x_3 + y_3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si trova senza difficoltà $x_1 = 4$, $y_1 = -10$, $x_2 = 1$, $y_2 = 1$, $x_3 = 1$, $y_3 = -1$. Quindi la matrice chiesta è

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Determinare l'asse e il vertice della parabola di equazione

$$x^2 + 2xy + y^2 - 7x - 9y + 19 = 0 \ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2xy$, ossia diagonalizzare la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $2(x')^2 - 8\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 19 = 0$, ossia $(x' - 2\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - \frac{3}{\sqrt{2}})$. Quindi il vertice della parabola ha coordinate $x'_V = 2\sqrt{2}$, $y'_V = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Le sue coordinate nel sistema di riferimento originale sono date da

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_V - y'_V) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ y_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_V + y'_V) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

L'asse della parabola è infine la retta parallela all'asse y' (ossia, alla bisettrice $y + x = 0$) e passante per il vertice, ossia la retta $y + x = 4$.

Appello

Esercizio 4. Calcolare la parte reale, la parte immaginaria e le radici quadrate del numero complesso $z = \dfrac{-8+i}{7+i} - \dfrac{3-4i}{5+5i}$.

Si moltiplica numeratore e denominatore della prima frazione per $7 - i$ e numeratore e denominatore della seconda per $5 - 5i$ (oss: sarebbe stato possibile usare $1 - i$, ma in questo caso $7^2 + 1^2 = 50 = 5^2 + 5^2$ quindi era più comodo usare $5 - 5i$). Si trova

$$z = -1 + i.$$

Le radici quadrate di z sono i complessi

$$w = x + iy$$

tali che $x^2 - y^2 + 2ixy = z$, cioè

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy \quad\;\; = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Abbiamo quindi $x^2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, cioè $x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$ e $y = \frac{1}{2x}$.
Osservazione: $\frac{2}{-1+\sqrt{2}} = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)$ quindi l'espressione di y si può semplificare.

Esercizio 5. a) Trovare il piano π contenente la retta

$$r: \quad \begin{cases} 3x - 3y + 3z - 14 = 0 \\ x - 3y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

e passante per il punto $P(1, 0, 7)$.

Consideriamo il fascio di piani contenenti r, ossia $\lambda(3x - 3y + 3z - 14) + \mu(x - 3y - z - 4) = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P si trova $\lambda = \mu$ e quindi l'equazione di π è $2x - 3y + z - 9 = 0$.

b) Determinare un piano parallelo a π e distante 2 da esso.

Conviene cercare un punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ che disti 2 dal piano π. Deve essere

$$\frac{|2x_0 - 3y_0 + z_0 - 9|}{\sqrt{3^2 + 5}} = \frac{|2x_0 - 3y_0 + z_0 - 9|}{\sqrt{14}} = 2$$

e quindi si può scegliere $x_0 = \sqrt{14}$, $y_0 = 0$ e $z_0 = 9$. Pertanto il piano π' passante per $Q(\sqrt{14}, 0, 9)$ e parallelo a π dista 2 da π. La sua equazione è $2x - 3y + z - 9 - 2\sqrt{14} = 0$. L'altra possibilità è fornita dal piano che è simmetrico a π' rispetto a π, ossia $2x - 3y + z - 9 + 2\sqrt{14} = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
24 giugno 2009 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Parte comune

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a_2x^2 + a_1x + a_0 & \longmapsto (2a_2 + 5a_1; a_0 - 3a_1) \end{aligned}$$

a) Verificare che f è un'applicazione lineare.

   Si tratta solo di verificare se, dati due polinomi P e Q e uno scalare λ vale

$$\begin{aligned} f(P+Q) &= f(P) + f(Q) \\ f(\lambda P) &= \lambda f(P) \end{aligned}$$

   È molto facile vedere che questo è vero.

b) Dire se f può essere iniettiva.

   No, non lo può essere perché $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3 (una sua base è data da $(1, x, x^2)$) mentre $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2. Il teorema delle dimensioni dice quindi che $\operatorname{Ker} f$ deve avere almeno dimensione 1.

c) Determinare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

   Abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(P) = \underline{0}\} \\ &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid 2a_2 + 5a_1 = 0, a_0 - 3a_1 = 0\} \\ &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 = -\frac{5}{2}a_1, a_0 = 3a_1\} \\ &= \left\{-\frac{5}{2}a_1x^2 + a_1x + 3a_1\right\} \\ &= \left\{a_1\left(-\frac{5}{2}x^2 + x + 3\right)\right\} \end{aligned}$$

Quindi $-\frac{5}{2}x^2 + x + 3$ è un vettore generatore di $\operatorname{Ker} f$; forma una famiglia libera (perché non è il vettore nullo); quindi è una base di $\operatorname{Ker} f$.

Dalla formula delle dimensioni, possiamo determinare che la dimensione di $\operatorname{Im} f$ è $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$. Quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ e qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ conviene. Possiamo prendere quindi la base canonica $\underline{e}_1 = (1; 0)$, $\underline{e}_2 = (0; 1)$.

Altra soluzione per determinare la base di $\operatorname{Im} f$: i vettori nell'immagine sono gli

$$\begin{aligned}(2a_2 + 5a_1; a_0 - 3a_1) &= (2a_2; 0) + (5a_1; -3a_1) + (0; a_0)\\ &= a_2(2; 0) + a_1(5; -3) + a_0(0; 1)\end{aligned}$$

Quindi una famiglia generatrice di $\operatorname{Im} f$ è data da $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ con $\underline{v}_1 = (2; 0)$, $\underline{v}_2 = (5; -3)$ e $\underline{v}_3 = (0; 1)$. Abbiamo chiaramente $\underline{v}_2 = \frac{5}{2}\underline{v}_1 + 3\underline{v}_3$ quindi tale famiglia non è libera. Invece la famiglia $(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$ è chiaramente libera e rimane generatrice. Quindi una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$. Osservazione: si può sostituire ovviamente $(1; 0)$ al posto di $\underline{v}_1$.

Esercizio 2. Risolvere al variare del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ x + ky - z = -1 \\ -3x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} 0 & k+2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}\\ &= k+2\end{aligned}$$

Quindi per $k \neq -2$ il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione. Lo risolviamo in questo caso. Il sistema è equivalente ai seguenti sistemi:

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 1 & \\ +(k+2)y = 0 & \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_1 \\ -x - 5y = -4 & \mathrm{R}_3 - 2R_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + \quad 2y + z = \ \ 1 \\ \qquad (k+2)y \quad = \ \ 0 \qquad \mathrm{R}_2 - 2R_3 \\ -x - \quad 5y \quad = -4 \end{cases}$$

Quindi $y = 0$ (perché $k \neq -2$), quindi $x = 4$ (nella terza) e quindi $z = 5$ (nella prima). Ora, se $k = -2$, i sistemi di cui sopra rimangono equivalenti a quello iniziale. La seconda equazione dell'ultimo sistema diventa $0 = 0$, quindi risulta soddisfatta per ogni x, y e z. Le soluzioni del sistema sono quindi della forma $\begin{pmatrix} 4-5y \\ y \\ 5-7y \end{pmatrix}$. A posteriori le condizioni del teorema di Rouché–Capelli sono quindi verificate e la caratteristica del sistema è 2.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k-4 & -2k+6 & 2k-8 \\ -2k+4 & 2k-3 & -2k+2 \\ -k+2 & k-3 & -k+4 \end{pmatrix}$$

a) Per quale valore di k la matrice ammette 1 come autovalore?

Basta imporre che $\det(A-I) = 0$. Poiché tale determinante vale $14-6k$ (si suggerisce di aggiungere la seconda colonna alla prima e alla terza prima di svolgere il resto del calcolo del determinante), il valore cercato è $k = \frac{7}{3}$.

b) Per il valore di k determinato nel punto precedente, dire se la matrice A è diagonalizzabile.

Per $k = \frac{7}{3}$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

e i suoi autovalori sono 0, 1, 3. Essendo tali autovalori reali e distinti, la matrice è diagonalizzabile. (Si poteva per semplicità considerare la matrice $3A$ e mostrare che essa è diagonalizzabile.)

Seconda prova in itinere

Esercizio 4. Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

a) $\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P(x) &\longmapsto \int_1^3 (P(t))^2 \, \mathrm{d}t \end{aligned}$

L'applicazione f_1 non è lineare. La presenza del quadrato impedisce la linearità. Consideriamo $\lambda = -1$ e $P(x) = 1$ (il polinomio costante uguale a 1). Allora $f_1(P) = \int_1^3 1^2 \, \mathrm{d}t = [t]_1^3 = 2$ mentre $f_1(\lambda P) = \int_1^3 (-1)^2 \, \mathrm{d}t = \int_1^3 1 \, \mathrm{d}t = 2 \neq -2 = \lambda f_1(P)$.

b) $\begin{aligned} f_2 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (1+2i)z - (2-7i)\overline{z} \end{aligned}$

Se z e $z' \in \mathbb{C}$, sappiamo che $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ per cui $f_2(z+z') = (1+2i)(z+z') - (2-7i)\left(\overline{z+z'}\right) = (1+2i)z + (1+2i)z' - (2-7i)\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) == (1+2i)z + (1+2i)z' - (2-7i)\overline{z} + (2-7i)\overline{z'} = f_2(z) + f_2(z')$. D'altra parte, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z} = \lambda \overline{z}$ perché siccome $\lambda \in \mathbb{R}$, vale $\overline{\lambda} = \lambda$. Quindi $f_2(\lambda z) = (1+2i) \cdot (\lambda z) - (2-7i)\overline{\lambda z} = \lambda(1+2i)z - (2-7i)\lambda\overline{z} = \lambda f_2(z)$. Quindi f_2 è lineare.

c) Determinare se la seguente applicazione è lineare e, nel caso affermativo, la sua matrice rappresentativa rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ di $\mathbb{R}^2$, dove $\underline{v}_1 = (3;2)$ e $\underline{v}_2 = (1;1)$.

$$\begin{aligned} f_3 : \quad \mathbb{R}^3 \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y;z) &\longmapsto (2x+y+2z; -2x+3y+z) \end{aligned}$$

L'applicazione è lineare. Si tratta di verificare se, dati $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$, $(x';y';z') \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono

$$f_3((x;y;z) + (x';y';z')) = f_3(x;y;z) + f_3(x';y';z')$$
$$f_3(\lambda(x;y;z)) = \lambda f_3(x;y;z).$$

Si può verificare senza difficoltà, oppure osservare che f_3 è l'applicazione lineare associata ad una matrice di tipo $(2,3)$.

Calcoliamo

$$\begin{aligned} f_3(1;0;0) &= (2;-2) \\ f_3(0;1;0) &= (1;3) \\ f_3(0;0;1) &= (2;1) \end{aligned}$$

Dobbiamo risolvere i tre sistemi

$$x_1\underline{v}_1 + y_1\underline{v}_2 = (2;-2) \iff \begin{cases} 3x_1 + y_1 = 2 \\ 2x_1 + y_1 = -2 \end{cases}$$
$$x_2\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2 = (1;3) \iff \begin{cases} 3x_2 + y_2 = 1 \\ 2x_2 + y_2 = 3 \end{cases}$$
$$x_3\underline{v}_1 + y_3\underline{v}_2 = (2;1) \iff \begin{cases} 3x_3 + y_3 = 2 \\ 2x_3 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Si trova senza difficoltà $x_1 = 4$, $y_1 = -10$, $x_2 = -2$, $y_2 = 7$, $x_3 = 1$, $y_3 = -1$. Quindi la matrice chiesta è

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -10 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Determinare l'asse e il vertice della parabola di equazione

$$x^2 + 2xy + y^2 - 7x - 9y + 17 = 0 \ .$$

Bisogna anzitutto eliminare il termine $2xy$, ossia diagonalizzare la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad , \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ .$$

La rotazione cercata è quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

e la nuova equazione della conica è $2(x')^2 - 8\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 17 = 0$, ossia $(x' - 2\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - \frac{1}{\sqrt{2}})$. Quindi il vertice della parabola ha coordinate $x'_V = 2\sqrt{2}$, $y'_V = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Le sue coordinate nel sistema di riferimento originale sono date da

$$\begin{cases} x_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_V - y'_V) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_V + y'_V) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

L'asse della parabola è infine la retta parallela all'asse y' (ossia, alla bisettrice $y + x = 0$) e passante per il vertice, ossia la retta $y + x = 4$.

Appello

Esercizio 4. Calcolare la parte reale, la parte immaginaria e le radici quadrate del numero complesso $z = \dfrac{-13+i}{7+i} - \dfrac{4-2i}{5+5i}$. Si segnala che $13 \cdot 7 = 91$.

Si moltiplica numeratore e denominatore della prima frazione per $7 - i$ e numeratore e denominatore della seconda per $5 - 5i$ (oss: sarebbe stato possibile usare $1 - i$, ma in questo caso $7^2 + 1^2 = 50 = 5^2 + 5^2$ quindi era più comodo usare $5 - 5i$). Si trova

$$z = -2 + i.$$

Le radici quadrate di z sono i complessi

$$w = x + iy$$

tali che $x^2 - y^2 + 2ixy = z$, cioè

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy \qquad = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5} \end{cases}$$

Abbiamo quindi $x^2 = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}$, cioè $x = \pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{5}}{2}}$ e $y = \frac{1}{2x}$.
Osservazione: $\frac{2}{-2+\sqrt{5}} = 2\left(\sqrt{5} + 2\right)$ quindi l'espressione di y si può semplificare.

Esercizio 5. a) Trovare il piano π contenente la retta

$$r: \quad \begin{cases} 3x - 5y + 3z - 14 = 0 \\ x - 5y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

e passante per il punto $P(1, 0, 7)$.

Consideriamo il fascio di piani contenenti r, ossia $\lambda(3x - 5y + 3z - 14) + \mu(x - 5y - z - 4) = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P si trova $\lambda = \mu$ e quindi l'equazione di π è $2x - 5y + z - 9 = 0$.

b) Determinare un piano parallelo a π e distante 2 da esso.

Conviene cercare un punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ che disti 2 dal piano π. Deve essere

$$\frac{|2x_0 - 5y_0 + z_0 - 9|}{\sqrt{5^2 + 5}} = \frac{|2x_0 - 5y_0 + z_0 - 9|}{\sqrt{30}} = 2$$

e quindi si può scegliere $x_0 = \sqrt{30}$, $y_0 = 0$ e $z_0 = 9$. Pertanto il piano π' passante per $Q(\sqrt{30}, 0, 9)$ e parallelo a π dista 2 da π. La sua equazione è $2x - 5y + z - 9 - 2\sqrt{30} = 0$. L'altra possibilità è fornita dal piano che è simmetrico a π' rispetto a π, ossia $2x - 5y + z - 9 + 2\sqrt{30} = 0$.