Osservazioni generali

Innanzitutto

Non si può dividere per 0.

Per i numeri complessi

Quando si risolve

$$z^3 = a\overline{z}$$

con a dato, ricordarsi di stare attento per che cosa si divide. Infatti **non si può dividere per 0**, quindi se si vuol dividere o semplificare qualcosa, bisogna prima assicurarsi che il qualcosa sia diverso da 0. Questo evita il grosso errore di dividere per 0 perché **non si può dividere per 0**. In questo caso, dividendo per 0 si perdeva la soluzione $z = 0$, che è una soluzione ovvia dell'equazione.

Inoltre, se la costante a è della forma $-b$, con $|b| = \rho$ e $\arg b = \theta$, allora $|a| = |b| = \rho$ ma $\arg a = \arg b + \pi$.

Altra osservazione: il prodotto per $e^{i\theta}$ fa una rotazione di centro O (l'origine), cioè 0 (il complesso nullo), e angolo θ; il prodotto per $\rho e^{i\theta}$ fa la stessa rotazione più una dilatazione di costante ρ e sempre di centro O o 0.

Geometria analitica

Verificare i conti.
Verificare i conti.
Verificare i conti.

Per il piano normale al piano assegnato, verificare che i vettori normali sono effettivamente perpendicolari. Verificare che i punti A e B appartengono al piano trovato.

Per il piano contenente le rette parallele (esercizio 8), verificare che il vettore direttore delle rette è normale al vettore normale al piano. Se si è calcolato l'equazione parametrica, verificare che il o i punti per $t = 0$ stanno nel piano.

Spazi vettoriali

Ricordarsi che in un sottospazio vettoriale c'è sempre il vettore nullo. Quindi se non c'è, non è un sottospazio vettoriale. Questo permette ogni tanto di rispondere subito oppure dà la condizione su k (per la domanda c)).

Per l'esercizio 6, usare un determinante era controproducente, soprattutto se non si semplificava prima di espanderlo.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
27 aprile 2009 — Tema A

Tempo a disposizione: 2 ore e mezzo. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia P il punto d'intersezione tra la retta

$$r: \quad \begin{cases} x = -5 - 5t \\ y = 2 + t \\ z = 10 + 6t \end{cases}$$

e il piano di equazione $2y - z - 2 = 0$. Sia poi Q l'intersezione tra r e il piano di equazione $x - 3y + 2z - 5 = 0$. Calcolare la distanza tra P e Q.

Le coordinate del punto P si trovano sostituendo le equazioni di r in quella del primo piano. Si trova infatti $t = -2$ che, inserito nelle equazioni di r, porta a $P(5, 0, -2)$. Allo stesso modo si ha che $Q(0, 1, 4)$, cosicché $\overrightarrow{PQ} = (-5, 1, 6)$ e $\overline{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{62}$.

Esercizio 2. Determinare il piano ortogonale al piano $2x + y - 4z + 3 = 0$ e passante per i punti $A(1, 0, 2)$ e $B(-1, 1, 3)$.

Il vettore $\underline{n}_1$, normale al piano cercato, deve essere ortogonale al vettore $\underline{n}_2 = (2, 1, -4)$, normale al piano assegnato, e al vettore $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$. Si può pertanto scegliere $\underline{n}_1 = \underline{n}_2 \wedge \overrightarrow{AB} = (5, 6, 4)$ e quindi il piano cercato ha equazione $5(x - 1) + 6y + 4(z - 2) = 0$, ossia $5x + 6y + 4z - 13 = 0$. **Non dimenticare di verificare che A e B appartengono al piano e che il vettore normale al piano è normale a $\underline{n}_2$.**

Esercizio 3. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 + 2z + 1 + 2i = 0$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = -8i.$$

Possiamo calcolarne una radice quadrata,

$$\delta = 2 - 2i.$$

È allora facile vedere che le due soluzioni sono

$$z_1 = -2 + i$$
$$z_2 = -i$$

Si verifica che le due soluzioni sono <u>effettivamente</u> soluzioni dell'equazione.

Esercizio 4. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^3 = -\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\overline{z}$$

Una soluzione ovvia è $z = 0$. Se adesso z è una soluzione diversa da 0, scriviamo z in forma esponenziale

$$z = \rho e^{i\theta}$$

con $\rho > 0$ e θ reale. Abbiamo allora

$$\rho^3 e^{3i\theta} = -\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\rho e^{-i\theta},$$

cioè

$$\rho^2 e^{4i\theta} = -\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right).$$

Otteniamo quindi

$$\rho^2 = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

cioè $\rho = \sqrt{2}$. Quindi l'angolo θ verifica

$$\cos 4\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin 4\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e quindi $4\theta = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Questo conduce quindi a $\theta = -\frac{3}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}$ con $k = 0$, 1, 2 o 3 (gli altri valori di k producono le stesse soluzioni).

L'insieme delle cinque soluzioni è quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \left\{0, \sqrt{2}e^{-\frac{3}{16}i\pi + \frac{ik\pi}{2}} : 0 \leqslant k \leqslant 3\right\} \\ &= \left\{0, \sqrt{2}i^k e^{-\frac{3}{16}i\pi} : 0 \leqslant k \leqslant 3\right\}.\end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. <u>Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V.</u>

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x; y; z) : 2x + 3y + z = 0\}$;

Possiamo riconoscere il piano ortogonale al vettore $(2; 3; 1)$, oppure osservare che se $(x; y; z) \in W_1$, allora $z = -2x - 3y$ e quindi $(x; y; z) = x(1; 0; -2) + y(0; 1; -3)$ e quindi si tratta del sottospazio generato dai vettori $(1; 0; 2)$ e $(0; 1; -3)$.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ e $W_2 = \{P \in V_2 : P(1)P'(1) = 1\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, non appartiene al sottoinsieme, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = -k^2 + 2k - 1 \right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{$funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla sarà 0, quindi dobbiamo avere $-k^2 + 2k - 1 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = 1$ (soluzione doppia). In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla ci appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}
\int_0^5 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^5 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^5 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^5 g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda 0 + \mu 0 = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si considerino i quattro vettori $\underline{v}_1 = (1, 0, k, 2)$, $\underline{v}_2 = (k, -3, 2k+3, 4)$, $\underline{v}_3 = (4, 0, 1, 0)$ e $\underline{v}_4 = (k, 3, -2, 0)$, dipendenti da un parametro reale k.

a) Per quali valori di k i quattro vettori sono linearmente dipendenti?

I quattro vettori sono linearmente dipendenti se e solo se esistono quattro numeri reali λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4, non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 + \lambda_4 \underline{v}_4 = \underline{0} \ .$$

Ciò porta al sistema

$$\begin{cases}
\lambda_1 + k\lambda_2 + 4\lambda_3 + k\lambda_4 &= 0 \\
-3\lambda_2 + 3\lambda_4 &= 0 \\
k\lambda_1 + (2k+3)\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 &= 0 \\
2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0
\end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases}
(2k-6)\lambda_2 = 0 \\
\lambda_4 = \lambda_2 \\
\lambda_3 = -\lambda_2 \\
\lambda_1 = -2\lambda_2
\end{cases}$$

Esiste quindi una soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ se e solo se $k = 3$. Questo è l'unico valore di k per il quale i quattro vettori sono linearmente dipendenti.

b) Per $k = 1$, calcolare la dimensione del sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Abbiamo visto che per $k = 1$ i quattro vettori sono linearmente indipendenti. Quindi lo sono anche $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$. Ne segue che il sottospazio che generano ha dimensione 3.

Esercizio 7. Rappresentare graficamente gli insiemi di numeri complessi seguenti:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leqslant |z - 1| \leqslant 2\}$;

Sappiamo che la distanza tra due complessi z_1 e z_2 è $|z_1 - z_2|$. Segue che $|z - 1|$ è la distanza tra z e 1. Quindi l'insieme A è la corona di centro 1 e compresa tra le circonferenze di raggio $\frac{1}{2}$ e di raggio 2 (siccome le disuguaglianze sono larghe le due circonferenze fanno parte di A).

b) $B = \{e^{\frac{i\pi}{2}} z : z \in A\}$;

Il prodotto di un complesso z per $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ ha l'effetto di farne la rotazione di centro 0 e angolo $\frac{\pi}{2}$. Quindi B è l'immagine di A sotto l'azione della rotazione di centro 0 e angolo $\frac{\pi}{2}$, cioè la corona di centro i e compresa tra le circonferenze di raggio $\frac{1}{2}$ e di raggio 2.

c) $C = \{3e^{\frac{i\pi}{2}} z : z \in A\}$.

Osserviamo che $C = \{3w : w \in B\}$, cioè che C è l'immagine di B sotto l'azione dell'omotetia di centro 0 e rapporto (o costante) 3. Si tratta quindi della corona di centro $3i$ e compresa tra le circonferenze di raggio $\frac{3}{2}$ e di raggio 6.

Esercizio 8. Dopo aver verificato che le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x - y - z + 6 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 5y + z - 2 = 0 \\ x - 4y - 2z + 7 = 0 \end{cases}$$

sono parallele, determinare il piano che le contiene.

Un vettore direzionale $\underline{v}_r$ di r si trova come prodotto vettoriale dei vettori normali dei piani di cui r è intersezione. In formule:

$$\underline{v}_r = (1, 2, 0) \wedge (1, -1, -1) = (-2, 1, -3) \ .$$

Stesso discorso per la retta s:

$$\underline{v}_s = (1, 5, 1) \wedge (1, -4, -2) = (-6, 3, -9) = 3(-2, 1, -3) = 3\underline{v}_r \ .$$

Poiché $\underline{v}_r$ e $\underline{v}_s$ sono proporzionali, le due rette sono parallele.
Per trovare il piano che le contiene, si può considerare il fascio di piani contenente s, ossia

$$\lambda(x + 5y + z - 2) + \mu(x - 4y - 2z + 7) = 0 \ ,$$

e imporre il passaggio per uno dei punti di r, per esempio $A(-1, 0, 5)$ (per trovare il punto A si è scelto $y = 0$ perché permetteva di calcolare x facilmente nella prima equazione e quindi z nella seconda). Si trova che $\lambda = 2\mu$ e quindi il piano cercato ha equazione $x + 2y + 1 = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
27 aprile 2009 — Tema B

Tempo a disposizione: 2 ore e mezzo. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia P il punto d'intersezione tra la retta

$$r: \quad \begin{cases} x = -8 - 8t \\ y = 2 + t \\ z = 10 + 6t \end{cases}$$

e il piano di equazione $2y - z - 2 = 0$. Sia poi Q l'intersezione tra r e il piano di equazione $x - 3y + 2z - 5 = 0$. Calcolare la distanza tra P e Q.

Le coordinate del punto P si trovano sostituendo le equazioni di r in quella del primo piano. Si trova infatti $t = -2$ che, inserito nelle equazioni di r, porta a $P(8, 0, -2)$. Allo stesso modo si ha che $Q(0, 1, 4)$, cosicché $\overrightarrow{PQ} = (-8, 1, 6)$ e $\overline{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{101}$.

Esercizio 2. Determinare il piano ortogonale al piano $4x + y - 4z + 3 = 0$ e passante per i punti $A(1, 0, 2)$ e $B(-1, 1, 3)$.

Il vettore $\underline{n}_1$, normale al piano cercato, deve essere ortogonale al vettore $\underline{n}_2 = (4, 1, -4)$, normale al piano assegnato, e al vettore $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$. Si può pertanto scegliere $\underline{n}_1 = \underline{n}_2 \wedge \overrightarrow{AB} = (5, 4, 6)$ e quindi il piano cercato ha equazione $5(x - 1) + 4y + 6(z - 2) = 0$, ossia $5x + 4y + 6z - 17 = 0$. **Non dimenticare di verificare che A e B appartengono al piano e che il vettore normale al piano è normale a $\underline{n}_2$.**

Esercizio 3. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 - (4 + 6i)z - 5 + 14i = 0$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = -8i.$$

Possiamo calcolarne una radice quadrata,

$$\delta = 2 - 2i.$$

È allora facile vedere che le due soluzioni sono

$$z_1 = 1 + 4i$$
$$z_2 = 3 + 2i$$

Si verifica che le due soluzioni sono <u>effettivamente</u> soluzioni dell'equazione.

Esercizio 4. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^3 = -\left(1 + i\sqrt{3}\right)\overline{z}$$

Una soluzione ovvia è $z = 0$. Se adesso z è una soluzione diversa da 0, scriviamo z in forma esponenziale

$$z = \rho e^{i\theta}$$

con $\rho > 0$ e θ reale. Abbiamo allora

$$\rho^3 e^{3i\theta} = -\left(1 + i\sqrt{3}\right)\rho e^{-i\theta},$$

cioè

$$\rho^2 e^{4i\theta} = -\left(1 + i\sqrt{3}\right).$$

Otteniamo quindi

$$\rho^2 = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

cioè $\rho = \sqrt{2}$. Quindi l'angolo θ verifica

$$\cos 4\theta = -\frac{1}{2}$$
$$\sin 4\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e quindi $4\theta = \ -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Questo conduce quindi a $\theta = -\frac{1}{6}\pi + k\frac{\pi}{2}$ con $k = 0$, 1, 2 o 3 (gli altri valori di k producono le stesse soluzioni).

L'insieme delle cinque soluzioni è quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{0, \sqrt{2}e^{-\frac{1}{6}i\pi + \frac{ik\pi}{2}} : 0 \leqslant k \leqslant 3\right\} \\ &= \left\{0, \sqrt{2}i^k e^{-\frac{1}{6}i\pi} : 0 \leqslant k \leqslant 3\right\}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. <u>Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V</u>.

a) $V_1 = \mathbb{R}^4$ e $W_1 = \{(x; y; z; t) : 2x - 3y + z + t = 2\}$;

   Il vettore nullo, cioè $(0; 0; 0)$, non appartiene al sottoinsieme, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ e $W_2 = \{P \in V_2 : P'(-1) = 0\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, appartiene al sottoinsieme, quindi non è vuoto. Dati due polinomio P e Q tali che $P'(-1) = Q'(-1) = 0$ e due reali λ e μ, $(\lambda P + \mu Q)'(-1) = \lambda P'(-1) + \mu Q'(-1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$ quindi W_2 è un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = -2k^2 + 5k - 2 \right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{\text{funzioni continue da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla sarà 0, quindi dobbiamo avere $-2k^2 + 5k - 2 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = 2$ e $k = \frac{1}{2}$. In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla ci appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}
\int_0^4 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^4 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^4 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^4 g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda 0 + \mu 0 = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si considerino i quattro vettori $\underline{v}_1 = (1, 0, k, 2)$, $\underline{v}_2 = (k, -3, 2k+3, 4)$, $\underline{v}_3 = (1, 0, 1, 0)$ e $\underline{v}_4 = (k, 3, -2, 0)$, dipendenti da un parametro reale k.

a) Per quali valori di k i quattro vettori sono linearmente dipendenti?

I quattro vettori sono linearmente dipendenti se e solo se esistono quattro numeri reali λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4, non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 + \lambda_4 \underline{v}_4 = \underline{0} \ .$$

Ciò porta al sistema

$$\begin{cases}
\lambda_1 + k\lambda_2 + \lambda_3 + k\lambda_4 &= 0 \\
-3\lambda_2 + 3\lambda_4 &= 0 \\
k\lambda_1 + (2k+3)\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 &= 0 \\
2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0
\end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases}
(2k-3)\lambda_2 = 0 \\
\lambda_4 = \lambda_2 \\
\lambda_3 = -\lambda_2 \\
\lambda_1 = -2\lambda_2
\end{cases}$$

Esiste quindi una soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$ se e solo se $k = \frac{3}{2}$. Questo è l'unico valore di k per il quale i quattro vettori sono linearmente dipendenti.

b) Per $k = 1$, calcolare la dimensione del sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Abbiamo visto che per $k = 1$ i quattro vettori sono linearmente indipendenti. Quindi lo sono anche $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$. Ne segue che il sottospazio che generano ha dimensione 3.

Esercizio 7. Rappresentare graficamente gli insiemi di numeri complessi seguenti:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\big((2-3i)z\big) = 1\}$;

Se scriviamo $z = x + iy$ con x e $y \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$(2-3i)z = 2x + 3y + i(2y - 3x)$$

e quindi $A = \{z \in \mathbb{C} : 2y - 3x = 1\}$, cioè A è la retta passante per il punto di coordinate $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$ (cioè $z_0 = \frac{i}{2}$) e il punto di coordinate $x = -\frac{1}{3}$, $y = 0$ (cioè $z_1 = -\frac{1}{3}$).

b) $B = \{e^{\frac{i\pi}{2}} z : z \in A\}$;

Il prodotto di un complesso z per $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ ha l'effetto di farne la rotazione di centro 0 e angolo $\frac{\pi}{2}$. Quindi B è l'immagine di A sotto l'azione della rotazione di centro 0 e angolo $\frac{\pi}{2}$, cioè la retta passante per i punti $z_0' = iz_0 = -\frac{1}{2}$ e $z_1' = iz_1 = -\frac{i}{3}$

c) $C = \{3e^{\frac{i\pi}{2}} z : z \in A\}$.

Osserviamo che $C = \{3w : w \in B\}$, cioè che C è l'immagine di B sotto l'azione dell'omotetia di centro 0 e rapporto (o costante) 3. Si tratta quindi della retta passante per i punti $z_0'' = 3z_0' = -\frac{3}{2}$ e $z_1'' = 3z_1' = -i$

Esercizio 8. Dopo aver verificato che le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x - y - z + 9 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 5y + z - 2 = 0 \\ x - 4y - 2z + 7 = 0 \end{cases}$$

sono parallele, determinare il piano che le contiene.

Un vettore direzionale $\underline{v}_r$ di r si trova come prodotto vettoriale dei vettori normali dei piani di cui r è intersezione. In formule:

$$\underline{v}_r = (1, 2, 0) \wedge (1, -1, -1) = (-2, 1, -3) \ .$$

Stesso discorso per la retta s:

$$\underline{v}_s = (1, 5, 1) \wedge (1, -4, -2) = (-6, 3, -9) = 3(-2, 1, -3) = 3\underline{v}_r \ .$$

Poiché $\underline{v}_r$ e $\underline{v}_s$ sono proporzionali, le due rette sono parallele.
Per trovare il piano che le contiene, si può considerare il fascio di piani contenente s, ossia

$$\lambda(x + 5y + z - 2) + \mu(x - 4y - 2z + 7) = 0 \ ,$$

e imporre il passaggio per uno dei punti di r, per esempio $A(-4, 0, 5)$ (per trovare il punto A si è scelto $y = 0$ perché permetteva di calcolare x facilmente nella prima equazione e quindi z nella seconda). Si trova che $\lambda = -7\mu$ e quindi il piano cercato ha equazione $2x + 13y + 3z - 7 = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
27 aprile 2009 — Tema C

Tempo a disposizione: 2 ore e mezzo. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia P il punto d'intersezione tra la retta

$$r: \quad \begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 10 + 6t \end{cases}$$

e il piano di equazione $2y - z - 2 = 0$. Sia poi Q l'intersezione tra r e il piano di equazione $x - 3y + 2z - 5 = 0$. Calcolare la distanza tra P e Q.

Le coordinate del punto P si trovano sostituendo le equazioni di r in quella del primo piano. Si trova infatti $t = -2$ che, inserito nelle equazioni di r, porta a $P(3, 0, -2)$. Allo stesso modo si ha che $Q(0, 1, 4)$, cosicché $\overrightarrow{PQ} = (-3, 1, 6)$ e $\overline{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{46}$.

Esercizio 2. Determinare il piano ortogonale al piano $6x + y - 4z + 3 = 0$ e passante per i punti $A(1, 0, 2)$ e $B(-1, 1, 3)$.

Il vettore $\underline{n}_1$, normale al piano cercato, deve essere ortogonale al vettore $\underline{n}_2 = (6, 1, -4)$, normale al piano assegnato, e al vettore $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$. Si può pertanto scegliere $\underline{n}_1 = \underline{n}_2 \wedge \overrightarrow{AB} = (5, 2, 8)$ e quindi il piano cercato ha equazione $5(x - 1) + 2y + 8(z - 2) = 0$, ossia $5x + 2y + 8z - 21 = 0$. **Non dimenticare di verificare che A e B appartengono al piano e che il vettore normale al piano è normale a $\underline{n}_2$.**

Esercizio 3. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 + (6 + 4i)z + 5 + 14i = 0$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = -8i.$$

Possiamo calcolarne una radice quadrata,

$$\delta = 2 - 2i.$$

È allora facile vedere che le due soluzioni sono

$$z_1 = -4 - i$$
$$z_2 = -2 - 3i$$

Si verifica che le due soluzioni sono <u>effettivamente</u> soluzioni dell'equazione.

Esercizio 4. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^3 = \left(\sqrt{3} - i\right)\overline{z}$$

Una soluzione ovvia è $z = 0$. Se adesso z è una soluzione diversa da 0, scriviamo z in forma esponenziale

$$z = \rho e^{i\theta}$$

con $\rho > 0$ e θ reale. Abbiamo allora

$$\rho^3 e^{3i\theta} = \left(\sqrt{3} - i\right)\rho e^{-i\theta},$$

cioè

$$\rho^2 e^{4i\theta} = \sqrt{3} - i.$$

Otteniamo quindi

$$\rho^2 = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

cioè $\rho = \sqrt{2}$. Quindi l'angolo θ verifica

$$\cos 4\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin 4\theta = -\frac{1}{2}$$

e quindi $4\theta = -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Questo conduce quindi a $\theta = -\frac{1}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}$ con $k = 0$, 1, 2 o 3 (gli altri valori di k producono le stesse soluzioni).

L'insieme delle cinque soluzioni è quindi

$$\mathcal{S} = \left\{0, \sqrt{2}e^{-\frac{1}{24}i\pi + \frac{ik\pi}{2}} : 0 \leqslant k \leqslant 3\right\}$$
$$= \left\{0, \sqrt{2}i^k e^{-\frac{1}{24}i\pi} : 0 \leqslant k \leqslant 3\right\}.$$

Esercizio 5. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. <u>Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V</u>.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x + 3y; 2y - 3x; 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

   Siccome $(x+3y; 2y-3x; 3y) = x(1; -3; 0)+y(3; 2; 3)$, si tratta del sottospazio generato dai vettori $(1; -3; 0)$ e $(3; 2; 3)$.

b) $V_2 = \mathbb{R}[x]$ e $W_2 = \{P \in V_2 : P(3) = 1\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, non appartiene al sottoinsieme, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.

c) $V_3 = \mathbb{R}[x]$ e $W_3 = \{P \in V_3 : P(1)P'(1) = 1\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, non appartiene al sottoinsieme, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.

d) Determinare i valori di k tali che $W_4 = \left\{ f \in V_4 : \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = k^2 + 2k + 1 \right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_4 = \{\text{funzioni continue da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_4 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla sarà 0, quindi dobbiamo avere $k^2 + 2k + 1 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = -1$ (soluzione doppia). In quel caso, il sottoinsieme W_4 diventa $W_4 = \left\{ f \in V_4 : \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla ci appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_4 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}\int_1^3 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^3 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^3 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si considerino i quattro vettori $\underline{v}_1 = (1, 0, k, 2)$, $\underline{v}_2 = (k, -3, 2k+3, 4)$, $\underline{v}_3 = (-2, 0, 1, 0)$ e $\underline{v}_4 = (k, 3, -2, 0)$, dipendenti da un parametro reale k.

a) Per quali valori di k i quattro vettori sono linearmente dipendenti?

I quattro vettori sono linearmente dipendenti se e solo se esistono quattro numeri reali λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4, non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 + \lambda_4 \underline{v}_4 = \underline{0}\ .$$

Ciò porta al sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + k\lambda_2 - 2\lambda_3 + k\lambda_4 & = 0 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_4 & = 0 \\ k\lambda_1 + (2k+3)\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 & = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} 2k\lambda_2 = 0 \\ \lambda_4 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 = -2\lambda_2 \end{cases}$$

Esiste quindi una soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$ se e solo se $k = 0$. Questo è l'unico valore di k per il quale i quattro vettori sono linearmente dipendenti.

b) Per $k = 1$, calcolare la dimensione del sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Abbiamo visto che per $k = 1$ i quattro vettori sono linearmente indipendenti. Quindi lo sono anche $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$. Ne segue che il sottospazio che generano ha dimensione 3.

Esercizio 7. Rappresentare graficamente gli insiemi di numeri complessi seguenti:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{3} \leqslant |z+3| \leqslant 2\}$;

Sappiamo che la distanza tra due complessi z_1 e z_2 è $|z_1 - z_2|$. Segue che $|z+3|$ è la distanza tra z e -3. Quindi l'insieme A è la corona di centro -3 e compresa tra le circonferenze di raggio $\frac{1}{3}$ e di raggio 2 (siccome le disuguaglianze sono larghe le due circonferenze fanno parte di A).

b) $B = \{e^{-\frac{i\pi}{2}} z : z \in A\}$;

Il prodotto di un complesso z per $e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$ ha l'effetto di farne la rotazione di centro 0 e angolo $-\frac{\pi}{2}$. Quindi B è l'immagine di A sotto l'azione della rotazione di centro 0 e angolo $-\frac{\pi}{2}$, cioè la corona di centro $3i$ e compresa tra le circonferenze di raggio $\frac{1}{3}$ e di raggio 2.

c) $C = \{2e^{-\frac{i\pi}{2}} z : z \in A\}$.

Osserviamo che $C = \{2w : w \in B\}$, cioè che C è l'immagine di B sotto l'azione dell'omotetia di centro 0 e rapporto (o costante) 2. Si tratta quindi della corona di centro $6i$ e compresa tra le circonferenze di raggio $\frac{2}{3}$ e di raggio 4.

Esercizio 8. Dopo aver verificato che le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ x - y - z + 7 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 5y + z - 2 = 0 \\ x - 4y - 2z + 7 = 0 \end{cases}$$

sono parallele, determinare il piano che le contiene.

Un vettore direzionale $\underline{v}_r$ di r si trova come prodotto vettoriale dei vettori normali dei piani di cui r è intersezione. In formule:

$$\underline{v}_r = (1,2,0) \wedge (1,-1,-1) = (-2,1,-3)\ .$$

Stesso discorso per la retta s:

$$\underline{v}_s = (1,5,1) \wedge (1,-4,-2) = (-6,3,-9) = 3(-2,1,-3) = 3\underline{v}_r\ .$$

Poiché $\underline{v}_r$ e $\underline{v}_s$ sono proporzionali, le due rette sono parallele.
Per trovare il piano che le contiene, si può considerare il fascio di piani contenente s, ossia

$$\lambda(x + 5y + z - 2) + \mu(x - 4y - 2z + 7) = 0\ ,$$

e imporre il passaggio per uno dei punti di r, per esempio $A(-2, 0, 5)$ (per trovare il punto A si è scelto $y = 0$ perché permetteva di calcolare x facilmente nella prima equazione e quindi z nella seconda). Si trova che $\lambda = 5\mu$ e quindi il piano cercato ha equazione $2x + 7y + z - 1 = 0$.

Università degli Studi di Bergamo
— Corso integrato di Analisi 1 (Geometria e Algebra Lineare) —
27 aprile 2009 — Tema D

Tempo a disposizione: 2 ore e mezzo. Calcolatrici, libri e appunti non sono ammessi.
Ogni esercizio va iniziato all'inizio di una pagina.
Vanno consegnati solo questo foglio e la "bella".
Non saranno accettate risposte non giustificate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia P il punto d'intersezione tra la retta

$$r: \quad \begin{cases} x = -6 - 6t \\ y = 2 + t \\ z = 10 + 6t \end{cases}$$

e il piano di equazione $2y - z - 2 = 0$. Sia poi Q l'intersezione tra r e il piano di equazione $x - 3y + 2z - 5 = 0$. Calcolare la distanza tra P e Q.

Le coordinate del punto P si trovano sostituendo le equazioni di r in quella del primo piano. Si trova infatti $t = -2$ che, inserito nelle equazioni di r, porta a $P(6, 0, -2)$. Allo stesso modo si ha che $Q(0, 1, 4)$, cosicché $\overrightarrow{PQ} = (-6, 1, 6)$ e $\overline{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{73}$.

Esercizio 2. Determinare il piano ortogonale al piano $x + y - 4z + 3 = 0$ e passante per i punti $A(1, 0, 2)$ e $B(-1, 1, 3)$.

Il vettore $\underline{n}_1$, normale al piano cercato, deve essere ortogonale al vettore $\underline{n}_2 = (1, 1, -4)$, normale al piano assegnato, e al vettore $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$. Si può pertanto scegliere $\underline{n}_1 = \underline{n}_2 \wedge \overrightarrow{AB} = (5, 7, 3)$ e quindi il piano cercato ha equazione $5(x - 1) + 7y + 3(z - 2) = 0$, ossia $5x + 7y + 3z - 11 = 0$. **Non dimenticare di verificare che A e B appartengono al piano e che il vettore normale al piano è normale a $\underline{n}_2$.**

Esercizio 3. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Si tratta di un'equazione del secondo grado. Il suo discriminante è

$$\Delta = -8i.$$

Possiamo calcolarne una radice quadrata,

$$\delta = 2 - 2i.$$

È allora facile vedere che le due soluzioni sono

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 + 2i \\ z_2 &= 1 \end{aligned}$$

Si verifica che le due soluzioni sono <u>effettivamente</u> soluzioni dell'equazione.

Esercizio 4. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^3 = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) \overline{z}$$

Una soluzione ovvia è $z = 0$. Se adesso z è una soluzione diversa da 0, scriviamo z in forma esponenziale

$$z = \rho e^{i\theta}$$

con $\rho > 0$ e θ reale. Abbiamo allora

$$\rho^3 e^{3i\theta} = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) \rho e^{-i\theta},$$

cioè

$$\rho^2 e^{4i\theta} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Otteniamo quindi

$$\rho^2 = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

cioè $\rho = \sqrt{2}$. Quindi l'angolo θ verifica

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 4\theta &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

e quindi $4\theta = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Questo conduce quindi a $\theta = -\frac{1}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}$ con $k = 0$, 1, 2 o 3 (gli altri valori di k producono le stesse soluzioni).

L'insieme delle cinque soluzioni è quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{0, \sqrt{2}e^{-\frac{1}{16}i\pi + \frac{ik\pi}{2}} : 0 \leqslant k \leqslant 3\right\} \\ &= \left\{0, \sqrt{2}i^k e^{-\frac{1}{16}i\pi} : 0 \leqslant k \leqslant 3\right\}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinare in quali dei seguenti casi il sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale. <u>Non si chiede né di verificare che V è uno spazio vettoriale né che W è incluso in V</u>.

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{(x - 3y; 5x + y; xy) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

   I vettori $(1; 5; 0)$ ($x = 1$, $y = 0$) e $(-3; 1; 0)$ ($x = 0$, $y = 1$) appartengono a W_1, però la loro somma $\underline{v} = (-2; 6; 0)$ non ci appartiene. Infatti per appartenere al questo insieme dovrebbe essere della forma $\underline{v} = (x - 3y; 5x + y; xy)$, quindi o $x = 0$ o $y = 0$. Se $x = 0$, dobbiamo avere $y = 6$ (per la seconda componente), ma la prima sarebbe -18; se invece $y = 0$, dobbiamo avere $x = -2$ (per la prima componente), ma la seconda sarebbe -10. Quindi non è un sottospazio vettoriale.

b) $V_2 = \mathbb{R}_3[x]$ e $W_2 = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in V_2 : 2a_3 + a_1 = 0\}$;

Il vettore nullo, cioè il polinomio costante uguale a 0, appartiene al sottoinsieme, quindi non è vuoto. Dati due polinomio $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $Q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ tali che $2a_3 + a_1 = 0$ e $2b_3 + b_1 = 0$ e due reali λ e μ, abbiamo $(\lambda P + \mu Q) = (\lambda a_3 + \mu b_3)x^3 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x^2 + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + \lambda a_0 + \mu b_0$ quindi $2(\lambda a_3 + \mu b_3) + \lambda a_1 + \mu b_1 = 2\lambda a_3 + \lambda a_1 + 2\mu b_3 + \mu b_1 = \lambda 0 + \mu 0 = 0$ e quindi W_2 è un sottospazio vettoriale.

c) Determinare i valori di k tali che $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2k^2 + 5k + 2 \right\}$ sia un sottospazio vettoriale di $V_3 = \{\text{funzioni continue da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}\}$.

Per essere un sottospazio vettoriale, W_3 deve contenere la funzione nulla. L'integrale della funzione nulla sarà 0, quindi dobbiamo avere $2k^2 + 5k + 2 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $k = -2$ e $k = -\frac{1}{2}$. In quel caso, il sottoinsieme W_3 diventa $W_3 = \left\{ f \in V_3 : \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ e diventa relativamente ovvio che è un sottospazio vettoriale. Infatti la funzione nulla ci appartiene e quindi è non vuoto. Inoltre se f e g sono due elementi di W_3 e λ e μ sono due reali, allora

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^2 \lambda f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \mu g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda 0 + \mu 0 = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si considerino i quattro vettori $\underline{v}_1 = (1, 0, k, 2)$, $\underline{v}_2 = (k, -3, 2k + 3, 4)$, $\underline{v}_3 = (3, 0, 1, 0)$ e $\underline{v}_4 = (k, 3, -2, 0)$, dipendenti da un parametro reale k.

a) Per quali valori di k i quattro vettori sono linearmente dipendenti?

I quattro vettori sono linearmente dipendenti se e solo se esistono quattro numeri reali λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4, non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \lambda_3\underline{v}_3 + \lambda_4\underline{v}_4 = \underline{0} \ .$$

Ciò porta al sistema

$$\begin{cases}
\lambda_1 + k\lambda_2 + 3\lambda_3 + k\lambda_4 & = 0 \\
-3\lambda_2 + 3\lambda_4 & = 0 \\
k\lambda_1 + (2k+3)\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 & = 0 \\
2\lambda_1 + 4\lambda_2 & = 0
\end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases}
(2k-5)\lambda_2 = 0 \\
\lambda_4 = \lambda_2 \\
\lambda_3 = -\lambda_2 \\
\lambda_1 = -2\lambda_2
\end{cases}$$

Esiste quindi una soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$ se e solo se $k = \frac{5}{2}$. Questo è l'unico valore di k per il quale i quattro vettori sono linearmente dipendenti.

b) Per $k = 1$, calcolare la dimensione del sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Abbiamo visto che per $k = 1$ i quattro vettori sono linearmente indipendenti. Quindi lo sono anche $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$. Ne segue che il sottospazio che generano ha dimensione 3.

Esercizio 7. Rappresentare graficamente gli insiemi di numeri complessi seguenti:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\big((4+5i)z\big) = 1\}$;

Se scriviamo $z = x + iy$ con x e $y \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$(4+5i)z = 4x - 5y + i(4y + 5x)$$

e quindi $A = \{z \in \mathbb{C} : 4y + 5x = 1\}$, cioè A è la retta passante per il punto di coordinate $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$ (cioè $z_0 = \frac{i}{4}$) e il punto di coordinate $x = \frac{1}{5}$, $y = 0$ (cioè $z_1 = \frac{1}{5}$).

b) $B = \{e^{-\frac{i\pi}{2}} z : z \in A\}$;

Il prodotto di un complesso z per $e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$ ha l'effetto di farne la rotazione di centro 0 e angolo $-\frac{\pi}{2}$. Quindi B è l'immagine di A sotto l'azione della rotazione di centro 0 e angolo $-\frac{\pi}{2}$, cioè la retta passante per i punti $z_0' = -iz_0 = \frac{1}{4}$ e $z_1' = -iz_1 = -\frac{i}{5}$

c) $C = \{2e^{-\frac{i\pi}{2}} z : z \in A\}$.

Osserviamo che $C = \{2w : w \in B\}$, cioè che C è l'immagine di B sotto l'azione dell'omotetia di centro 0 e rapporto (o costante) 2. Si tratta quindi della retta passante per i punti $z_0'' = 2z_0' = \frac{1}{2}$ e $z_1'' = 2z_1' = -\frac{2i}{5}$

Esercizio 8. Dopo aver verificato che le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y - z + 4 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 5y + z - 2 = 0 \\ x - 4y - 2z + 7 = 0 \end{cases}$$

sono parallele, determinare il piano che le contiene.

Un vettore direzionale $\underline{v}_r$ di r si trova come prodotto vettoriale dei vettori normali dei piani di cui r è intersezione. In formule:

$$\underline{v}_r = (1,2,0) \wedge (1,-1,-1) = (-2,1,-3) \ .$$

Stesso discorso per la retta s:

$$\underline{v}_s = (1,5,1) \wedge (1,-4,-2) = (-6,3,-9) = 3(-2,1,-3) = 3\underline{v}_r \ .$$

Poiché $\underline{v}_r$ e $\underline{v}_s$ sono proporzionali, le due rette sono parallele.
Per trovare il piano che le contiene, si può considerare il fascio di piani contenente s, ossia

$$\lambda(x + 5y + z - 2) + \mu(x - 4y - 2z + 7) = 0 \ ,$$

e imporre il passaggio per uno dei punti di r, per esempio $A(1, 0, 5)$ (per trovare il punto A si è scelto $y = 0$ perché permetteva di calcolare x facilmente nella prima equazione e quindi z nella seconda). Si trova che $\lambda = \frac{1}{2}\mu$ e quindi il piano cercato ha equazione $x - y - z + 4 = 0$.